Biblioteca di Cultura Moderna

Carlo Cellucci

Filosofia e matematica

GLF Editori Laterza

Carlo Cellucci

Filosofia e matematica

Non cesseremo di esplorare
E alla fine di tutto il nostro esplorare
Arriveremo là donde eravamo partiti
E per la prima volta conosceremo quel luogo.

T.S. ELIOT, *Little Gidding*

Introduzione

Fin dall'antichità la matematica è stata un oggetto di riflessione privilegiato per i maggiori filosofi, che ne hanno tratto ispirazione costante per l'elaborazione delle loro teorie della conoscenza e delle loro dottrine metafisiche. Il rapporto tra la filosofia e la matematica è così stretto che alcuni dei maggiori filosofi sono stati anche tra i maggiori matematici (si pensi, ad esempio, a Descartes, Leibniz e Pascal). La riflessione sulla matematica ha assunto varie forme nella storia del pensiero. In questo libro io non mi propongo di ricostruire tutte tali forme, perché ciò sarebbe impossibile in uno spazio limitato, bensì di presentare quella che mi sembra oggi la più soddisfacente.

Il punto di vista di questo libro differisce radicalmente da quello che è stato dominante nell'ultimo secolo. Le principali differenze sono le seguenti.

1) Secondo il punto di vista dominante la riflessione sulla matematica è compito di una disciplina specializzata, la filosofia della matematica, nata con Frege, caratterizzata da propri problemi e metodi ma in un certo senso «la parte più facile della filosofia» (Dummett 1998, 190). Infatti, la filosofia della matematica «non è semplicemente un'area specializzata. Molti dei problemi che nascono in essa, sebbene non tutti, sono casi particolari di problemi più generali che nascono in altre parti della filosofia, e si presentano nella filosofia della matematica in una forma particolarmente pura, o particolarmente semplificata» (ivi, 123). Perciò, «se non si possono risolvere tali problemi, quali problemi filosofici si può sperare di risolvere?» (ivi, 191).

In questo libro io sostengo invece che affidare la riflessione sulla matematica ad una disciplina specializzata ha seri limiti, perché non si può supporre che i problemi generali della conoscenza si presentino nella matematica in una forma particolarmente pura o particolarmente semplificata. La riflessione sulla matematica coinvolge tali problemi in tutta la loro

impurità e complessità, perciò non può essere condotta adeguatamente senza affrontarli.

Alla base dell'idea che i problemi generali della conoscenza si presentino nella matematica in una forma particolarmente pura o particolarmente semplificata c'è la credenza che, mentre la matematica applicata mutua «concetti dall'esperienza, dall'osservazione, dalle teorie scientifiche, e persino dall'economia», la matematica pura non lo fa, anzi è «la sua purezza che dà origine a molte delle questioni» che nella filosofia della matematica «abbiamo cercato di risolvere» (ivi, 190). La matematica pura «non ha bisogno di input dall'esperienza: è esclusivamente il prodotto del pensiero» (Dummett 2001, 10).

Ma tale credenza è ingiustificata perché, al pari della matematica applicata, anche la matematica pura mutua concetti dall'esperienza, dall'osservazione, dalle teorie scientifiche e persino dall'economia. Di conseguenza le questioni che si affrontano nella riflessione sulla matematica hanno tutta l'impurità e la complessità di cui i problemi generali della conoscenza sono capaci.

2) Secondo il punto di vista dominante il principale problema della filosofia della matematica è quello della giustificazione della matematica. Esso nasce dal fatto che la matematica «poggia su due sostegni: l'inesorabile logica deduttiva, essenza della dimostrazione, e gli assiomi», e questo fa sorgere «la questione su che cosa si basa la nostra fede nell'inferenza logica» e «che cosa giustifica gli assiomi» (Maddy 1997, 1-2). Per dare una risposta a tale questione occorre chiarire qual è il fondamento della matematica, ossia la base della sua certezza. In tal modo si risolve il problema della giustificazione della matematica. Invece, il problema della scoperta matematica non appartiene alla filosofia della matematica. Questa, infatti, «si occupa del prodotto del pensiero matematico; lo studio del processo di produzione è affare della psicologia, non della filosofia» (Dummett 1991, 305).

In questo libro io sostengo invece che il principale problema della riflessione sulla matematica è quello della scoperta matematica. Tale problema include il problema della giustificazione, perché la scoperta non è semplicemente un momento dell'attività matematica ma si estende lungo l'intero suo arco, quindi comprende anche la giustificazione.

L'idea che il principale problema della filosofia della matematica sia quello della giustificazione ha reso la filosofia della matematica una disciplina sempre meno incisiva, dedita allo studio di questioni (come quella di Frege: che cos'è il numero uno?) che ai matematici sembrano irrilevanti, trascurando quelle che sono più importanti per la comprensione della matematica. Non c'è da meravigliarsi, perciò, che i rapporti tra i filosofi della matematica e i matematici siano caratterizzati da una diffusa indifferenza e incomprensione, che sfocia spesso in manifestazioni di aperto antagonismo. Infatti, il problema della giustificazione della matematica appare inappetibile

alla stragrande maggioranza dei matematici, che lo considerano ininfluente per il proprio lavoro.

Inoltre, l'idea che risolvere il problema della giustificazione della matematica consista nel chiarire qual è il fondamento della matematica, contrasta con l'esperienza matematica la quale mostra che la matematica non è un edificio statico che poggia su un fondamento unico, dato una volta per sempre, ma è un processo dinamico, vario ed articolato, i cui modi di giustificazione sono anch'essi vari ed articolati.

3) Secondo il punto di vista dominante la filosofia della matematica non aggiunge nulla alla matematica. Poiché il suo principale problema è quello della giustificazione della matematica, essa mira a chiarire il fondamento della matematica, ossia la base della sua certezza, non ad estenderla aggiungendole qualcosa. Perciò, «come la filosofia del diritto non legifera e la filosofia della scienza non pone e controlla ipotesi scientifiche, così (dobbiamo rendercene conto dall'inizio) la filosofia della matematica non incrementa il numero dei teoremi e delle teorie matematiche» (Körner 1960, 9). Le sue indagini «non devono avere assolutamente alcun effetto né pratico né dottrinale sulla matematica» (Wagner 1982, 267). Infatti, la matematica «viene prima, il filosofare su di essa viene dopo, non vale l'inverso» (Hersh 1997, *xi*). Questo non è che un caso particolare del fatto generale che «la filosofia non contribuisce al progresso della conoscenza: fa semplicemente chiarezza su ciò che già sappiamo» (Dummett 2001, 24).

In questo libro io sostengo invece che la riflessione sulla matematica è rilevante per il progresso della matematica. Poiché il suo principale problema è quello della scoperta matematica, essa mira a perfezionare i metodi di scoperta esistenti e ad inventarne di nuovi. In questo modo essa può contribuire al progresso della matematica, perché il perfezionamento dei metodi di scoperta esistenti e l'invenzione di nuovi hanno un'importanza cruciale al riguardo. Ciò è riconosciuto dallo stesso Frege, secondo cui «anche uno sviluppo del metodo dà incremento alla scienza. Anche Bacon ritiene sia più importante scoprire un mezzo mediante il quale tutto possa venir facilmente provato che non fare una singola scoperta, e del resto tutti i grandi progressi scientifici dei tempi moderni hanno avuto la loro origine in un perfezionamento del metodo» (Frege 1964, *xi*).

Che la riflessione sulla matematica possa contribuire al progresso della matematica implica che la matematica non viene prima e il filosofare su di essa viene dopo, ma entrambi procedono di conserva concorrendo al progresso della conoscenza.

4) Secondo il punto di vista dominante la filosofia della matematica non richiede una conoscenza approfondita della matematica perché, per il suo scopo principale di dare una giustificazione della matematica attraverso una chiarificazione del suo fondamento, non occorre una conoscenza dettagliata dell'edificio eretto su tale fondamento. Perciò, anche «se si ha poca

conoscenza della matematica, non è necessario rimediare a tale difetto prima di interessarsi di filosofia della matematica» (Dummett 1998, 124). Si può benissimo «comprendere buona parte delle discussioni sull'argomento e buona parte delle teorie avanzate su di esso senza una conoscenza approfondita del suo contenuto» (*ibid.*). Parimenti, la filosofia della matematica non richiede una conoscenza approfondita della storia della matematica, perché «l'eziologia delle idee matematiche, per quanto interessante, non è qualcosa il cui studio prometta di rivelare molto sulla struttura del pensiero: semplicemente, in massima parte l'origine e lo sviluppo delle idee matematiche sono troppo determinate da influenze estranee» (George-Velleman 2002, 2). Al contrario, la filosofia della matematica richiede una conoscenza approfondita della logica matematica, «non tanto come parte del suo oggetto di studio quanto come strumento di indagine» (Dummett 1998, 124).

In questo libro io sostengo invece che la riflessione sulla matematica presuppone una conoscenza approfondita della matematica. Prescinderne ha portato la filosofia della matematica ad occuparsi di questioni marginali, escludendo deliberatamente quelle più ampie. Essa lo ha fatto in base all'argomento che, sebbene le questioni più ampie siano «più interessanti, più urgenti, più significative delle più ristrette questioni logiche propriamente fondazionali», queste ultime «sono suscettibili di soluzione», mentre «le soluzioni delle questioni più ampie possono dipendere da ulteriori progressi della matematica stessa, progressi che non possiamo ancora prevedere» (Mayberry 1994, 19). Ma tale argomento non tiene conto del fatto che, soprattutto a causa dei teoremi di incompletezza di Gödel, nessuna delle questioni logiche propriamente fondazionali è stata risolta dalla filosofia della matematica, né d'altra parte vi sono prove che le soluzioni delle questioni più ampie possano dipendere da ulteriori progressi della matematica. Come osserva Wittgenstein, «anche cinquecento anni fa poteva esistere una filosofia della matematica; una filosofia di quello che la matematica era allora» (Wittgenstein 1978, V, 52).

La riflessione sulla matematica presuppone anche una conoscenza approfondita della storia della matematica. Prescinderne ha portato la filosofia della matematica a considerare la matematica come un edificio statico, basato su rapporti lineari di dipendenza logica tra assiomi e teoremi determinati a priori. Al contrario, la storia della matematica mostra che la matematica è un processo dinamico, che si sviluppa per vie talora tortuose e tormentate e non determinate a priori, e procede attraverso false partenze ed arresti, periodi di routine e svolte improvvise. Ciò ha impedito alla filosofia della matematica di render conto non solo della scoperta matematica, ma anche dei reali processi di giustificazione matematica.

Quanto all'idea che la filosofia della matematica richieda una conoscenza approfondita della logica matematica come strumento di

indagine, essa rischia di essere vuota. Infatti, sebbene la filosofia della matematica abbia condotto «un intenso studio di quelli che si dicono i fondamenti della matematica» servendosi della logica matematica come strumento di indagine, «i principali risultati della matematica sono impenetrabili a quanto è stato trovato lì» (Hamming 1980, 86). Oggi i contributi della logica matematica «alla comprensione filosofica dei fondamenti scemano fino al punto dell'irrilevanza» (Kac-Rota-Schwartz 1986, 167). Lo scopo stesso della filosofia della matematica di chiarire il fondamento della matematica ha perso contenuto. Come riconoscono anche i sostenitori della logica matematica, i «fondamenti della matematica sono ormai fuori moda. Oggi, la maggior parte dei principali matematici ignora i fondamenti», anzi «i fondamenti della matematica sono in disgrazia persino presso i logici matematici» (Simpson 1999, *vii*). Di fatto la «logica matematica ha ormai abbandonato le sue relazioni con i fondamenti. Si è sottratta all'abbraccio della filosofia diventando una branca convenzionale della matematica» (Mayberry 1994, 26).

Alla base dell'idea che la logica matematica sia lo strumento della filosofia della matematica vi è la sfiducia nell'approccio ai problemi filosofici proprio della tradizione filosofica, sfiducia che ha portato a vedere «la storia della logica matematica dell'ultimo secolo come una continua lotta da parte dei suoi praticanti per liberare la loro disciplina dalla morsa della filosofia» (ivi, 25).

Tale sfiducia traspare già dai primi cultori della filosofia della matematica, come Russell, secondo cui «la filosofia, fin dai tempi più remoti, ha avanzato pretese maggiori, e ha raggiunto risultati minori, di ogni altro ramo del sapere» (Russell 1999, 13). Infatti, «l'apparato logico era così misero che tutte le ipotesi che i filosofi poterono immaginare vennero trovate incoerenti con i fatti» (ivi, 243). Ma ora è «arrivato il momento di porre fine a questo stato di cose insoddisfacente» (ivi, 13). Questo è possibile grazie alla logica matematica, che «ha introdotto nella filosofia lo stesso tipo di progresso che Galilei introdusse nella fisica» (ivi, 68-69). Essa «dà il metodo di ricerca della filosofia, esattamente come la matematica dà il metodo della fisica. E come la fisica» alla fine «è diventata una scienza attraverso la nuova osservazione di fatti e la conseguente manipolazione matematica da parte di Galilei, così la filosofia ai nostri giorni sta diventando scientifica mediante la simultanea acquisizione di nuovi fatti e metodi logici» (ivi, 243).

Questi temi sono ricorrenti nella filosofia della matematica dopo Russell. Per esempio, Łukasiewicz afferma che «la filosofia dev'essere ricostruita dalle sue stesse fondamenta; essa deve trarre la propria ispirazione dal metodo scientifico e deve basarsi sulla nuova logica» (Łukasiewicz 1970, 112). Parimenti Kreisel afferma che l'approccio ai problemi filosofici proprio della tradizione filosofica è utilizzabile solo «in uno stadio primordiale, quando sappiamo troppo poco sul fenomeno considerato e sulla conoscenza

che ne abbiamo per porci specifiche questioni sensate» (Kreisel 1984, 82). Esso dev'essere sostituito da un approccio basato sulla logica matematica, che è «lo strumento della filosofia della matematica esattamente come altra matematica, per esempio la teoria delle equazioni differenziali parziali, è lo strumento di quella che si usava chiamare filosofia naturale» (Kreisel 1967, 201).

La sfiducia nell'approccio della tradizione filosofica e la sua sostituzione con un approccio basato sulla logica matematica sono due fondamentali caratteristiche della filosofia della matematica che, per la loro sterilità, hanno portato al suo progressivo impoverimento e sono state tra le principali cause del suo declino. Tale declino si è accentuato sempre più dopo la scoperta dei teoremi di incompletezza di Gödel, tanto che Mac Lane ha affermato che la filosofia della matematica è «un soggetto dormiente all'incirca dal 1931» (Mac Lane 1981, 462).

5) Secondo il punto di vista dominante la matematica è dimostrazione di teoremi. Essa, infatti, «è una collezione di dimostrazioni. Questo è vero qualunque punto di vista si assuma sulla matematica (platonismo, antiplatonismo, intuizionismo, formalismo, nominalismo, ecc.)» (Takeuti 1987, 1). Può anche darsi che, «nel 'fare matematica', la dimostrazione di teoremi non sia tutto, ma essa supera di gran lunga qualunque cosa stia al secondo posto» (Franks 1989b, 12). Naturalmente, «l'attività della matematica non consiste semplicemente nello scrivere dimostrazioni a caso» di «teoremi scelti a caso», come si vede dal fatto che la scelta «dei problemi, delle direzioni di ricerca è influenzata da una molteplicità di considerazioni (pratiche, artistiche, mistiche)»; ma tali considerazioni sono «tutte non matematiche» (Monk 1976, 4). Esse, quindi, non appartengono alla filosofia della matematica.

In questo libro io sostengo invece che la matematica è soluzione di problemi. Ogni soluzione genera nuovi problemi e dipende dalla soluzione di questi ultimi. Perciò essa non è mai definitiva ma richiede sempre nuovi approfondimenti.

6) Secondo il punto di vista dominante il metodo della matematica è il metodo assiomatico. Infatti nella matematica, «per dimostrare una proposizione, si parte da certi primi principi, si derivano risultati da quegli assiomi, poi, usando tali assiomi e risultati, si procede a dimostrare altri risultati» (Leary 2000, 48). Il metodo assiomatico fornisce «una strategia per trovare e ricordare dimostrazioni», perché «relativamente poche proprietà, le poche cosiddette strutture fondamentali del Bourbaki, sono adeguate per strategie simili in un dominio della matematica molto ampio», anche se «l'uso dell'analisi assiomatica come strategia dimostrativa non sembra noto a coloro che scrivono di euristica, come Pólya» (Kreisel-MacIntyre 1982, 232-233). Inoltre, il metodo asssiomatico è disponibile per tutta la matematica, perché «tutte le teorie matematiche, quando sono sufficientemente sviluppate, sono

suscettibili di assiomatizzazione» (Dummett 1991, 305). Poiché il metodo della matematica è il metodo assiomatico, «matematica e scienza sono imprese intellettuali complementari ma contrapposte, che si distinguono per la direzione del loro sguardo. La prima procede in avanti, dalle ipotesi alle conclusioni: cioè dagli assiomi ai teoremi che ne derivano. La seconda risale all'indietro, dalle conclusioni alle premesse: cioè dai dati sperimentali alle leggi fisiche da cui essi possono essere derivati» (Odifreddi 2001, 233).

In questo libro io sostengo invece che il metodo della matematica è il metodo analitico, un metodo che, a differenza di quello assiomatico, non parte da assiomi che sono dati una volta per sempre e servono per dimostrare qualsiasi teorema, né procede all'ingiù discendendo dagli assiomi ai teoremi, ma procede all'insù risalendo dai problemi ad ipotesi sufficienti per la loro soluzione. A differenza degli assiomi, le ipotesi non sono date dall'inizio, anzi sono lo scopo della ricerca, e non sono mai definitive, ma sono destinate ad essere rimpiazzate da altre e sono formulate in funzione di particolari problemi.

L'idea che nella matematica, per dimostrare una proposizione, si parta da certi primi principi, si derivino risultati da quegli assiomi, poi, usando tali assiomi e risultati, si proceda a dimostrare altri risultati, contrasta con l'esperienza matematica, la quale mostra che nella matematica prima si intravedono problemi e poi si cercano ipotesi sufficienti per la loro soluzione. Dunque non si discende, come vuole il metodo assiomatico, da assiomi dati a teoremi ma si risale, come vuole il metodo analitico, da problemi ad ipotesi per la loro soluzione. Che nella matematica si derivino i teoremi dagli assiomi «non corrisponde alla semplice osservazione. Se si scoprisse che il teorema di Pitagora non segue dai postulati» di Euclide, «continueremmo a cercare il modo di cambiare i postulati fino a quando esso diventasse vero. I postulati di Euclide sono stati derivati dal teorema di Pitagora, non è avvenuto l'inverso» (Hamming 1980, 87).

Parimenti, l'idea che il metodo assiomatico fornisca una strategia per trovare e ricordare dimostrazioni, contrasta con l'esperienza matematica, la quale mostra che le dimostrazioni basate sul metodo assiomatico spesso sembrano trovate solo grazie ad un colpo di fortuna e appaiono artificiose e difficilmente comprensibili. Presentando solo il risultato finale della ricerca, stabilito per una via del tutto diversa da quella attraverso cui è stato raggiunto, tali dimostrazioni nascondono le relazioni tra il risultato finale e la conoscenza esistente, e così contribuiscono a rendere la matematica una disciplina difficile.

Anche l'idea che il metodo assiomatico sia disponibile per tutta matematica perché tutte le teorie matematiche, quando sono sufficientemente sviluppate, sono suscettibili di assiomatizzazione, contrasta con l'esperienza matematica, la quale mostra che l'assiomatizzazione non si applica naturalmente a tutte le parti della matematica. Alcune di esse non si prestano

ad essere assiomatizzate, ed esistono piuttosto come collezioni di problemi risolti o non risolti su certi tipi di oggetti matematici. Tale è il caso, ad esempio, della teoria dei numeri e di gran parte della teoria delle equazioni differenziali parziali.

Nello stesso modo, l'idea che matematica e scienza siano imprese intellettuali complementari ma contrapposte, che si distinguono per la direzione del loro sguardo, contrasta con l'esperienza matematica, la quale mostra che la matematica procede in modo molto simile alle altre scienze, risalendo all'indietro dalle conclusioni alle premesse, cioè dai problemi ad ipotesi che sono condizioni sufficienti per la loro soluzione. Di ciò rende adeguatamente conto il metodo analitico, che assimila la matematica alle altre scienze, e in particolare assimila la nozione matematica di dimostrazione alle nozioni di dimostrazione delle altre scienze.

I limiti del metodo assiomatico sono riconosciuti anche da molti matematici, i quali sottolineano che «l'assiomatizzazione è ciò che si fa per ultimo, è cosa di poca importanza», è soltanto «l'igiene della matematica» (Lang 1985, 19). La «posizione degli assiomi non è mai il punto di partenza, ma semmai quello d'arrivo di una teoria», e «le occasioni in cui si sia partiti dagli assiomi sono più l'eccezione che la regola» (Giusti 1999, 20). Nello «sviluppo e nella comprensione di un argomento gli assiomi arrivano tardi», e anche se «talora qualcuno cerca di inventare una nuova branca della matematica formulando certi assiomi e partendo di lì», tuttavia «sforzi del genere raramente ottengono riconoscimenti e sono duraturi. Esempi, problemi e soluzioni vengono prima. Poi vengono insiemi di assiomi su cui si può 'basare' la teoria già esistente. L'idea che la matematica consti essenzialmente di derivazioni da assiomi è arretrata. In effetti è sbagliata» (Hersh 1997, 6).

I limiti del metodo assiomatico sono riconosciuti anche da alcuni sostenitori del punto di vista dominante, i quali ammettono che tale metodo è inadatto per lo scopo della filosofia della matematica di chiarire il fondamento della matematica dandone così una giustificazione. Infatti, «nessuna teoria assiomatica, formale o informale, del primo ordine o di ordine superiore, può svolgere logicamente un ruolo fondazionale nella matematica», perché «è ovvio che non si può usare il metodo assiomatico per spiegare che cos'è il metodo assiomatico» (Mayberry 1994, 34-35). Poiché una teoria che si pone «come fondamento della matematica deve fornire un resoconto convincente della definizione assiomatica, essa non può essere presentata a sua volta, pena la circolarità, per mezzo di una definizione assiomatica» (ivi, 35).

7) Secondo il punto di vista dominante la logica della matematica è la logica deduttiva. Infatti, la deduzione «manifestamente svolge una parte saliente nella matematica. L'osservazione corretta che la scoperta di un teorema di solito non procede secondo le rigide regole della deduzione non ha

alcuna forza: si deve esporre una dimostrazione in modo sufficientemente dettagliato per convincere i lettori, e in effetti il suo autore, della sua piena cogenza deduttiva» (Dummett 1991, 305). È vero che «la deduzione è soltanto una componente del ragionamento matematico, inteso nel senso ampio di tutto il lavoro intellettuale che si fa quando si risolve un problema matematico. Ma questo non significa che essa non sia il concetto chiave per comprendere la validità nella matematica, o che la distinzione tra scoperta e giustificazione perda la sua importanza teorica» (Prawitz 1998, 332). Infatti, «quando si tratta di spiegare il notevole fenomeno che il lavoro su un problema matematico può concludersi con un risultato che tutti trovano definitivo e conclusivo, la nozione di deduzione è centrale» (*ibid.*). Da questo punto di vista la matematica «ha una metodologia unica tra tutte le scienze. È l'unica disciplina in cui la logica deduttiva è il solo arbitro della verità. Di conseguenza, le verità matematiche stabilite all'epoca di Euclide sono ritenute valide ancor oggi e sono ancora insegnate. Nessun'altra scienza può avanzare questa pretesa» (Franks 1989a, 68).

In questo libro io sostengo invece che la logica della matematica non è la logica deduttiva ma una logica più ampia che comprende, oltre alle inferenze deduttive, anche e soprattutto le inferenze non-deduttive. Infatti, è mediante tali inferenze che si trovano le ipotesi mediante le quali si risolvono i problemi matematici. Dunque la logica della matematica non è la logica matematica, che è soltanto una branca della matematica peraltro abbastanza marginale, ma è un insieme di regole, tecniche e metodi di procedura deduttivi e soprattutto non-deduttivi, e pertanto non è una teoria ma è un insieme di strumenti.

Affermare che la logica della matematica è la logica deduttiva restringe l'ambito dell'esperienza matematica a forme di ragionamento che si incontrano solo nei manuali di logica matematica, trascurando quelle che si usano realmente nell'attività matematica. Inoltre, non rende conto della natura di fondo dell'attività matematica, perché il ragionamento matematico non si basa principalmente sulle inferenze deduttive, che svolgono in esso un ruolo abbastanza circoscritto, bensì sulle inferenze non-deduttive. Come ammettono anche alcuni sostenitori del punto di vista dominante, la matematica «non è mai deduttiva nella sua creazione. Il matematico quando lavora formula ipotesi vaghe, visualizza vaste generalizzazioni e salta a conclusioni non garantite. Egli dispone e ridispone le sue idee, e si convince della loro verità molto prima di poterne stendere una dimostrazione logica», dopodiché «lo stadio deduttivo, stendere i risultati e scriverne la dimostrazione rigorosa, è relativamente banale», ed «è più un lavoro da disegnatore che non da architetto» (Halmos 1968, 380). Per di più, affermare che la logica della matematica è la logica deduttiva è in contrasto con i risultati delle neuroscienze, che mostrano che il cervello umano è molto inefficiente nelle

lunghe catene di inferenze deduttive, così come lo è nelle lunghe serie di calcoli.

Parimenti, affermare che, quando si tratta di spiegare che il lavoro su un problema matematico può concludersi con un risultato che tutti trovano definitivo e conclusivo, la nozione di deduzione è centrale, e che perciò le verità matematiche stabilite all'epoca di Euclide sono ritenute valide ancor oggi, non tiene conto del fatto che «oggi le dimostrazioni date da Euclide spesso appaiono false. E questo fenomeno non si limita al passato. Si racconta che una volta un ex redattore di *Mathematical Reviews* abbia detto che più di metà dei nuovi teoremi pubblicati oggi sono sostanzialmente veri, sebbene le dimostrazioni pubblicate siano false. Come può essere così se la matematica è la rigorosa deduzione di teoremi da postulati assunti e da risultati precedenti?» (Hamming 1980, 86).

Inoltre, affermare che la matematica ha una metodologia unica tra tutte le scienze perché è l'unica disciplina in cui la logica deduttiva è il solo arbitro della verità, è una petizione di principio, perché dà per scontato che la logica della matematica sia la logica deduttiva. Al contrario, la logica più ampia su cui si basa la matematica non distingue ma avvicina la metodologia della matematica a quella delle altre scienze, che si basa su inferenze dello stesso tipo.

8) Secondo il punto di vista dominante la scoperta matematica è un processo irrazionale, che non si basa sulla logica bensì sull'intuizione. L'attività «di un cervello creatore non ha mai avuto una spiegazione razionale, in matematica come in altri campi» (Dieudonné 1988, 38). In particolare la scoperta degli assiomi non si basa sulla logica, perché «non vi è alcuna speranza, ad ogni nuovo assioma si fa, per così dire, un salto nel buio, una scommessa», dunque «non siamo più nel dominio della scienza ma in quello della poesia» (Girard 1989, 169). In generale, «gli aspetti creativi e intuitivi del lavoro matematico si sottraggono all'incapsulamento logico» (Feferman 1998, 178). La scoperta matematica «si basa su intuizioni sorprendentemente vaghe e procede con attacchi e partenze annaspanti e con ripensamenti fin troppo frequenti. In tale quadro gli effettivi processi storici e individuali della scoperta matematica appaiono casuali ed illogici» (ivi, 77). Il ruolo dell'intuizione nella scoperta matematica è determinante «nella maggior parte dei ricercatori, che un'intuizione per quanto confusa dei fenomeni matematici da loro studiati spesso mette sulla via che li porterà alla meta» (Dieudonné 1962, 544-545).

In questo libro io sostengo invece che la matematica è un'attività razionale in ogni suo momento, ivi compreso quello più importante, la scoperta. Fin dall'antichità molti hanno riconosciuto non solo che la scoperta matematica è un processo razionale, ma anche che per essa esiste un metodo, ossia il metodo analitico. Tale metodo diede un grande potere euristico ai matematici antichi nella soluzione di problemi geometrici, e ha avuto un ruolo

decisivo nei nuovi sviluppi della matematica e della fisica all'inizio dell'età moderna. In esso, nella scoperta delle ipotesi, svolge un ruolo essenziale la logica, sia pure una logica intesa non nel modo restrittivo e un po' parrocchiale proprio del punto di vista dominante, ma in un modo più ampio che comprende anche e soprattutto le inferenze non-deduttive.

9) Secondo il punto di vista dominante non solo la scoperta matematica ma anche la giustificazione della matematica si basa sull'intuizione. Infatti, poiché il metodo della matematica è il metodo assiomatico, giustificare la matematica vuol dire giustificare la certezza degli assiomi, e questa si basa, direttamente o indirettamente, sull'intuizione. Direttamente, quando attraverso l'intuizione «gli assiomi ci si impongono come veri» (Gödel 1986- , II, 268). Indirettamente, quando per gli assiomi si dà una «dimostrazione della loro coerenza ottenuta mediante un ragionamento contenutistico» (Hilbert 1970, III, 175) basato sull'intuizione. Per questo motivo, «rendere conto della 'conoscenza' intuitiva nella matematica è il problema fondamentale dell'epistemologia matematica» (Hersh 1997, 65).

In questo libro io sostengo invece che la giustificazione della matematica non si basa sull'intuizione, bensì sul fatto che le ipotesi di cui si serve la matematica sono plausibili, cioè compatibili con la conoscenza esistente. Spesso si dice che «'plausibile' ha in sé un'aria soggettiva, psicologica, cosicché il termine è quasi equivalente a 'convincente' e 'retoricamente persuasivo'», e che «gli argomenti che risultano persuasivi per ragioni psicologiche sono giustamente considerati di scarso interesse nella matematica e nella filosofia» (Franklin 1987, 1). Ma 'plausibile', inteso come compatibile con la conoscenza esistente, non ha nulla di soggettivo né di psicologico.

Infatti, per valutare se un'ipotesi è plausibile, si esaminano le ragioni pro e contro di essa, questo esame viene condotto basandosi su fatti che avvalorano l'ipotesi o la screditano, dove tali fatti appartengono alla conoscenza esistente. Questo procedimento di valutazione dell'ipotesi è fallibile, perché la scelta dei fatti della conoscenza esistente può essere inadeguata, ed inoltre la conoscenza esistente non è data una volta per sempre, è in continuo sviluppo, ogni nuovo sviluppo fornisce nuovi elementi di valutazione dell'ipotesi, e questo può portare a respingerla. Ma tale procedimento non è né soggettivo né psicologico. Al contrario, è soggettiva e psicologica una giustificazione della matematica basata sull'intuizione.

10) Secondo il punto di vista dominante la matematica è un corpo di verità, e di verità assolutamente certe e quindi inconfutabili. Infatti, la matematica è «il paradigma della conoscenza certa e definitiva: beninteso, non immutabile, ma un corpo coerente di verità che si accumulano saldamente» (Feferman 1998, 77). Questo dipende dal fatto che, mentre «un'ipotesi fisica può essere verificata soltanto con l'accuratezza e l'interpretazione del miglior lavoro di laboratorio», una verità matematica

viene stabilita mediante una dimostrazione basata sul metodo assiomatico, e una tale dimostrazione «ha il più alto grado di certezza possibile per l'uomo» (Jaffe 1997, 135). Infatti, «se si vuol stabilire la verità di un'asserzione matematica al di là di ogni possibile dubbio, allo stato attuale non esiste alcuna alternativa praticabile alla presentazione assiomatica» (Rota 1997, 142). Le ipotesi fisiche vanno e vengono, nessuna di esse è definitiva, e perciò «nella fisica nulla è completamente certo» (Jaffe 1997, 140). Invece la matematica, basandosi sul metodo assiomatico, «dura un'eternità» (ivi, 139).

In questo libro io sostengo invece che la matematica è un corpo di conoscenze ma non contiene verità. L'idea di verità non è necessaria nella matematica così come non lo è nelle scienze naturali, e forse non lo è da nessuna parte tranne forse che nella teologia e nelle discussioni tra gli innamorati. Chi assume che la matematica sia un corpo di verità si caccia in un groviglio inestricabile, che lo porta ad affermazioni autodistruttive come quella che è legittimo «concludere, dal fatto che 'questa teoria ha le proprietà che vogliamo', che 'questa teoria è vera'» (Maddy 1997, 163). Per esempio, con un tale argomento Frege avrebbe potuto concludere, dal fatto che la sua ideografia aveva la proprietà che egli voleva di ridurre l'aritmetica alla logica, che essa era vera, salvo poi essere smentito dal paradosso di Russell.

Che la matematica non sia un corpo di verità non significa che essa non abbia un contenuto oggettivo. Significa soltanto che, come nel caso delle altre scienze, il suo contenuto non consiste di verità bensì di affermazioni plausibili, cioè compatibili con la conoscenza esistente. L'oggettività della matematica non sta nell'essere un corpo di verità ma nell'essere un insieme di affermazioni plausibili.

Quanto all'idea che la matematica sia un corpo di verità assolutamente certe e quindi inconfutabili, essa non tiene conto del fatto che «i postulati della matematica non erano scolpiti sulle tavole di pietra che Mosè portò giù dal monte Sinai» (Hamming 1980, 86). In realtà «noi non possiamo essere sicuri delle dimostrazioni correnti dei nostri teoremi» (*ibid.*). Infatti, non possiamo essere sicuri delle ipotesi su cui esse si basano.

Dal punto di vista della certezza, la matematica non gode di alcun privilegio rispetto alle altre scienze, ma è soggetta a quella stessa aleatorietà che è propria di tutte le creazioni umane. Nessuna delle nostre conoscenze matematiche è assolutamente certa, è soltanto plausibile, cioè compatibile con la conoscenza esistente, e tale compatibilità non ne assicura la certezza, poiché la conoscenza esistente non è assolutamente certa, è soltanto plausibile. Per molti secoli si è pensato che la matematica fosse un corpo di verità assolutamente certe, ma oggi è diventato chiaro che questa è un'illusione. L'incertezza e il dubbio hanno preso il posto dell'autocompiaciuta certezza del passato. Come riconoscono anche alcuni sostenitori del punto di vista dominante, a causa dei risultati stessi della logica matematica, già nella prima metà del Novecento «la matematica, che

aveva regnato per secoli come l'incarnazione della certezza, aveva perso tale ruolo» (Leary 2000, 3).

11) Secondo il punto di vista dominante la questione dell'adeguatezza della matematica per trattare il mondo fisico è inessenziale per la filosofia della matematica. La matematica è «un'impresa unitaria, che noi abbiamo ragione di studiare così com'è, e lo studio dei metodi effettivi della matematica, che comprende la matematica pura, rivela prontamente che anche la matematica moderna ha scopi tutti suoi, distinti dal suo ruolo nella scienza» (Maddy 1997, 205, nota 15). Certo, «è una cosa meravigliosa quando una branca della matematica diventa improvvisamente adeguata per nuove scoperte in un'altra scienza; entrambi i campi ne traggono enorme vantaggio. Ma molte (e forse la maggior parte delle) aree della matematica non saranno mai così fortunate. Nondimeno, la maggior parte dei matematici ritiene che il proprio lavoro non sia meno valido e meno importante della matematica che ha trovato utilizzazione in altre scienze. Per loro è sufficiente sperimentare e condividere la bellezza di un nuovo teorema. La nuova conoscenza matematica» è «un fine in sé» (Franks 1989b, 13).

In questo libro io sostengo invece che la questione dell'adeguatezza della matematica per trattare il mondo fisico è di primaria importanza per la riflessione sulla matematica. Infatti la matematica, se da un lato è un continuo con la filosofia, dall'altro lato è un continuo con le scienze naturali, e molti suoi sviluppi sono indissolubilmente legati ad esse.

12) Secondo il punto di vista dominante la matematica si basa solo sul pensiero concettuale. Anzi, essa «è il prodotto più puro del pensiero concettuale, che è una caratteristica della vita umana che la struttura pervasivamente e la distingue da tutto il resto» (George-Velleman 2002, 1). La matematica è «libera dalle costrizioni dell'esperienza», perciò entra «nel mondo toccata solo dalla mano della riflessione» (*ibid.*). Essa è «giustificata dal puro raziocinio, l'osservazione percettiva attraverso una qualsiasi delle nostre cinque modalità sensoriali non essendo né necessaria né rilevante» (*ibid.*). Perciò per la filosofia della matematica è inessenziale lo studio della percezione. Più in generale, per essa è inessenziale lo studio di «questioni come 'Quale cervello, o attività neurale, o architettura cognitiva rende possibile il pensiero matematico?'» (ivi, 2). Tale studio si concentra «su fenomeni che in realtà sono estranei alla natura del pensiero matematico», cioè «sugli stati neurali che in qualche modo portano il pensiero», mentre «ai filosofi interessa la natura di quei pensieri stessi, il contenuto portato dai veicoli neurali» (*ibid.*).

In questo libro io sostengo invece che la matematica non si basa solo sul pensiero concettuale ma anche sulla percezione, che interviene in essa, per esempio, nell'uso della figura. Perciò per la riflessione sulla matematica è importante lo studio della percezione. Più in generale, per essa è importante lo studio del cervello, delle attività neurali e delle architetture cognitive che

rendono possibile il pensiero matematico. Infatti, la matematica è un'attività umana, e l'unica matematica che l'uomo può fare è quella che il suo cervello, le sue attività neurali e le sue architetture cognitive gli consentono di fare. Perciò, che cos'è la matematica dipende in modo essenziale da che cosa sono il cervello, le attività neurali e le architetture cognitive dell'uomo.

L'idea che la matematica si basi solo sul pensiero concettuale non tiene conto del fatto che le capacità di distinguere la forma, la posizione e il numero non sono una prerogativa degli uomini ma anche di molte altre forme di vita animale. Tali capacità sono essenziali per tali forme di vita, che senza di esse non avrebbero potuto sopravvivere. La matematica non è, perciò, una caratteristica della vita umana che la distingue da tutto il resto, ma affonda le sue radici in capacità basilari dell'uomo e di molte altre forme di vita animale, e si inserisce in un processo naturale di adattamento all'ambiente.

Si conclude qui l'esame delle principali differenze tra il punto di vista di questo libro e quello che è stato dominante nell'ultimo secolo. Non che non ve ne siano altre, ma quelle qui considerate mostrano a sufficienza in che misura esso se ne allontana.

L'allontanamento è giustificato dal fatto che il punto di vista dominante non spiega come nascono e come si risolvono i problemi matematici. Invece di chiarirlo, esso presenta la matematica come una costruzione artificiosa, che non ne riflette gli aspetti rilevanti, e ne sopprime quei caratteri che ne fanno una disciplina viva e vitale. Ma in questo modo non rende conto della ricchezza, multiformità, dinamicità e flessibilità dell'esperienza matematica.

Per mostrare i limiti del punto di vista dominante, in questo libro io non lo descrivo in tutte le sue articolazioni storiche e concettuali, perché questo richiederebbe troppo spazio, ma soltanto quanto basta per mostrarne l'insostenibilità.

Per le articolazioni del punto di vista dominante, in mancanza di una approfondita ricostruzione storica e concettuale complessiva rimando, oltre che a testi introduttivi come Giaquinto 2002, Shapiro 2000, alle fonti primarie, molte delle quali sono facilmente accessibili attraverso antologie come Benacerraf-Putnam 1983, Ewald 1996, Hart 1996, Jacquette 2002, Mancosu 1998, van Heijenoort 1977. Per i vari modi in cui è stata condotta la riflessione sulla matematica nella storia del pensiero rimando, oltre che a testi introduttivi come Barbin-Caveing 1996, alle fonti primarie, da Platone a Mill, una cui scelta essenziale si può trovare in Baum 1973.

Parziali contestazioni del punto di vista dominante si possono trovare negli scritti raccolti nell'antologia di Tymoczko 1998, ma la mia posizione in questo libro è più radicale.

Per esempio, rispetto a Pólya, uno degli autori più significativi di tale antologia, io non affermo che «la prima regola di scoperta è avere cervello e buona fortuna. La seconda regola di scoperta è starsene seduti ad

aspettare che venga un'idea brillante» (Pólya 1990, 172). Non contrappongo la matematica in forma compiuta, vista come «puramente dimostrativa, consistente solo di dimostrazioni» assiomatiche, alla «matematica nel suo farsi», la quale «somiglia ad ogni altra conoscenza umana nel suo farsi» (Pólya 1954, I, *vi*). Non sostengo che il ragionamento assiomatico proprio della matematica in forma compiuta, è «sicuro, al di là di ogni controversia, e finale», a differenza del ragionamento congetturale proprio della matematica nel suo farsi, che «è rischioso, controverso, e provvisorio» (ivi, I, *v*). Non affermo che il ragionamento assiomatico è per il matematico «la sua professione e il carattere distintivo della sua scienza» (ivi, I, *vi*). Questi pregiudizi hanno impedito a Pólya di elaborare una concezione compiutamente alternativa al punto di vista dominante.

Il punto di vista di questo libro riprende e sviluppa quello di un mio precedente volume (Cellucci 1998; per una sintesi v. anche Cellucci 2000), di cui, in presenza di sovrapposizioni, riproduce anche alcuni argomenti. Ad esso rimando per alcune questioni che non sono trattate o sono trattate solo brevemente qui.

Nel libro non esamino tutte le questioni filosofiche sulla matematica, né tanto meno tutte le questioni filosofiche sulla conoscenza, perché questo richiederebbe molto più spazio. Tuttavia le questioni qui discusse dovrebbero essere comprese in ogni indagine sulla natura della matematica.

Il libro consta di numerosi brevi capitoli, ciascuno dei quali è in sé compiuto e può anche essere letto separatamente, ma il cui pieno significato risulterà chiaro solo nell'ambito complessivo del libro. Per illustrare il mio punto di vista spesso uso esempi matematici molto semplici, che possono essere esposti in poco spazio e non richiedono elaborate spiegazioni preliminari. Ma la semplicità non toglie nulla alla loro esemplarità.

Poiché il punto di vista di questo libro differisce radicalmente da quello dominante, che ha esercitato così a lungo la sua supremazia da essere ormai scambiato per senso comune, non mi aspetto che il lettore consenta subito con esso. Gli chiedo soltanto di trovare argomenti contrari, e di valutare attentamente se essi reggerebbero alle critiche a cui potrebbero essere sottoposti dal punto di vista di questo libro.

PARTE I

LA CONCEZIONE FONDAZIONALISTA

1
La concezione fondazionalista

1. Caratteri della concezione fondazionalista

Nell'età moderna e contemporanea si sono fronteggiate due concezioni della matematica: la concezione fondazionalista e la concezione euristica. Queste due concezioni non sono state le uniche sviluppate in tale periodo ma hanno occupato, sia pure in momenti differenti, una posizione così dominante da monopolizzare gran parte del dibattito. Sembra opportuno, perciò, concentrare l'attenzione su di esse.

Consideriamo anzitutto la concezione fondazionalista. Tale concezione è stata sviluppata negli ultimi decenni del Settecento da Kant, ha occupato una posizione dominante negli ultimi due secoli, e continua ad avere un notevole peso ancor oggi.

In base ad essa la filosofia deve dare per scontato che la matematica è conoscenza assolutamente certa, ma deve giustificarla attraverso un'indagine del suo fondamento, ossia della base della sua certezza. La filosofia non è un continuo con la matematica ma è un'attività autonoma da essa, e ha per oggetto non l'effettivo modo di procedere della matematica bensì il suo fondamento. Il principale problema della filosofia rispetto alla matematica è: qual è il fondamento della matematica, la base della sua certezza?

Il nome di concezione fondazionalista deriva dal fatto che essa assume come oggetto principale di studio il fondamento della matematica. Che un tale fondamento esista è chiaro, altrimenti la matematica non sarebbe conoscenza assolutamente certa. Tuttavia è un fondamento soltanto implicito, di cui non abbiamo una chiara consapevolezza. Si tratta, perciò, di renderlo esplicito. In tal modo potremo comprendere perché la matematica è conoscenza assolutamente certa, qual è la base della sua certezza, e che cosa rende possibile la sua realtà.

Tale compito può essere paragonato a quello di chi, pur essendo convinto «dell'immobilità di una roccia per aver tentato invano di spostarla», vuole stabilire «che cosa la sorregga con tanta saldezza» (Frege 1988, 14). L'immobilità della roccia corrisponde alla certezza della conoscenza matematica, e stabilire che cosa la sorregga con tanta saldezza corrisponde a stabilire quale è il fondamento della matematica.

2. Filosofia e giustificazione

Prima di avviare un'indagine del fondamento della matematica, la filosofia deve, però, affrontare due questioni preliminari.

La prima questione preliminare è: perché la filosofia può dare per scontato che la matematica sia conoscenza assolutamente certa?

Secondo la concezione fondazionalista, la filosofia può farlo perché la base della certezza della matematica è l'intuizione, che è una fonte (anzi l'unica fonte) di conoscenza assolutamente certa. Che la base della certezza della matematica sia l'intuizione è qualcosa di cui non abbiamo una chiara consapevolezza. Compito della filosofia è rendercene consapevoli, e così essa può dare una giustificazione della matematica.

Secondo la concezione fondazionalista, che dare una giustificazione della matematica consista nel renderci consapevoli del fatto che la base della certezza matematica è l'intuizione viene spesso trascurato, e ciò è fonte di confusione.

1) Talora si confonde la giustificazione della matematica con la giustificazione pragmatica, come quando si dice che la giustificazione della matematica si basa sul fatto che una decisione circa la verità dei suoi assiomi è possibile «studiandone il 'successo'», dove «successo significa qui fecondità di conseguenze, in particolare di conseguenze 'verificabili'» (Gödel 1986- , II, 261). Assiomi che siano «ricchi di conseguenze verificabili, che facciano tanta luce su un intero campo e diano metodi così potenti per risolvere problemi», devono «essere accettati almeno nello stesso senso di ogni teoria fisica ben stabilita» (*ibid.*).

Ma, secondo la concezione fondazionalista, in questo modo si trascura che gli assiomi possono essere ricchi di conseguenze verificabili anche quando sono falsi, anzi proprio perché falsi, dal momento che dal falso si può dedurre qualsiasi cosa. Perciò il fatto che tutte le conseguenze finora note degli assiomi siano verificabili non assicura che gli assiomi siano veri.

2) Talora si confonde la giustificazione della matematica con l'autogiustificazione, come quando si dice che la matematica dev'essere giudicata «in base ai propri standard, e non in base a standard extramatematici, siano essi scientifici o filosofici» (Maddy 1997, 203). La matematica «è indipendente sia dalla filosofia prima sia dalla scienza naturale (ivi compresa la filosofia naturalizzata che è un continuo con la scienza), in

breve è indipendente da ogni standard esterno» (ivi, 184). Perciò essa va «valutata nei propri termini», e «non dev'essere soggetta a critiche, né ha bisogno di essere appoggiata, da alcun punto di vista esterno, presunto superiore» (*ibid.*). In quanto impresa dotata di successo, essa «non deve rispondere ad alcun tribunale extra-matematico e non ha bisogno di alcuna giustificazione oltre la dimostrazione e il metodo assiomatico» (*ibid.*).

Ma, secondo la concezione fondazionalista, in questo modo si trascura che la matematica non può considerarsi giustificata finché non si è chiarita la base della sua certezza. Per chiarirla occorre un'indagine, che non può essere condotta rimanendo all'interno della matematica, perché sarebbe circolare usare la matematica per vagliare le sue pretese conoscitive. Perciò un'autogiustificazione della matematica è impossibile.

3. L'ambito della filosofia

La seconda questione preliminare è: perché la filosofia deve limitarsi a giustificare la matematica?

Secondo la concezione fondazionalista, ciò dipende dal fatto che la filosofia non può indagare i processi attraverso i quali i matematici arrivano alle loro scoperte. Questi, infatti, sono puramente soggettivi e per mezzo di essi non si può mai arrivare a quella certezza che è propria della conoscenza matematica. Perciò una logica della scoperta è impossibile. La filosofia può solo indagare i risultati delle scoperte dei matematici, perché questi sono un fatto che è dato oggettivamente e, per quanto vada continuamente accrescendosi, si accresce sempre sulla base di un fondamento dato, anche se implicito.

Secondo la concezione fondazionalista, che una logica della scoperta sia impossibile viene spesso trascurato, e ciò è fonte di confusione.

1) Talora si confonde la logica della scoperta con la psicologia della scoperta, come quando si dice che si può dare una trattazione logica della «psicologia della soluzione di problemi», e quindi della psicologia della scoperta, perché la scoperta «è un tipo di soluzione di problemi» (Simon 1977, 286). In particolare si può dare una trattazione logica dell'illuminazione improvvisa, che è il momento cruciale della soluzione di problemi. Infatti, l'illuminazione improvvisa è guidata da un albero di scopi e sottoscopi. Per raggiungere uno scopo, il soggetto genera un sottoscopo e cerca di raggiungerlo. Se ha successo ritorna allo scopo originario, altrimenti genera un sottosottoscopo per raggiungere quel sottoscopo, e così via. L'albero degli scopi e dei sottoscopi viene conservato nella memoria a breve termine, ma parallelamente l'informazione sull'ambiente del problema che il soggetto raccoglie nel corso dei suoi tentativi viene conservata nella memoria a lungo termine. Se il soggetto, non riuscendo a raggiungere uno scopo, abbandona per qualche tempo il problema, allora l'informazione nella

memoria a breve termine scompare ma quella nella memoria a lungo termine viene conservata. Perciò, quando il soggetto riprende in mano il problema e comincia a costruire un nuovo albero degli scopi, può disporre di informazione sull'ambiente del problema molto migliore di quella di cui disponeva prima, e perciò «possono apparirgli prontamente delle soluzioni che gli erano prima sfuggite nella ricerca protratta» (ivi, 297).

Ma, secondo la concezione fondazionalista, in questo modo non si spiega come il soggetto, sulla base delle conoscenze registrate nella memoria a lungo termine, possa trovare una soluzione del problema che non è contenuta in esse e quindi va al di là di esse. In mancanza di una tale spiegazione, il processo attraverso cui il soggetto trova la soluzione del problema rimane oscuro.

2) Talora si confonde la logica della scoperta con l'estetica della scoperta, come quando si dice che la «scoperta, in matematica come altrove, avviene combinando idee», e tuttavia richiede una scelta perché «vi è un numero estremamente grande di tali combinazioni, molte delle quali sono prive di interesse, mentre, al contrario, pochissime di esse possono essere feconde» (Hadamard 1945, 29). Ora, la scelta delle combinazioni feconde «è perentoriamente governata dal senso della bellezza scientifica» (ivi, 31). Tra le combinazioni possibili si selezionano «quelle che soddisfano il nostro senso della bellezza» (ivi, 32). Dunque, il criterio della bellezza costituisce la base ultima della scoperta.

Ma, secondo la concezione fondazionalista, in questo modo si trascura che il criterio della bellezza è soggettivo, inaffidabile e induce facilmente in errore. Per esempio, esso spinse Galilei a considerare il sole come collocato al centro di un sistema di cerchi perfetti lungo i quali i pianeti si muovevano con velocità costante, respingendo l'idea di Kepler che essi si muovessero lungo un'ellisse, perché l'ellisse gli sembrava un cerchio distorto, una forma imperfetta indegna dei corpi celesti, respinta anche dall'arte del primo Rinascimento. Inoltre, il criterio della bellezza spinse Galilei a considerare il moto circolare come più perfetto di quello rettilineo, perché un cerchio non ha inizio né fine, mentre una retta finita è una figura imperfetta, avendo fuori di sé qualcosa verso cui può essere prolungata. Ciò impedì a Galilei di formulare la legge di inerzia.

2
Le origini della concezione fondazionalista

1. Impossibilità di una logica della scoperta

Abbiamo detto che la ragione per cui, secondo la concezione fondazionalista, la filosofia deve limitarsi a giustificare la matematica attraverso un'indagine del suo fondamento è che, per essa, una logica della scoperta è impossibile.

Ciò appare chiaro da Kant, secondo cui sulla scoperta «la logica delle scuole non ci dice nulla al riguardo», né ce lo dice Bacon col suo metodo che «non basta per insegnare, secondo regole determinate, il modo di ricercare con fortuna» (Kant 1900- , VII, 223). Nel metodo di Bacon, infatti, «si deve sempre presupporre anzitutto qualcosa (partire da un'ipotesi) da cui intraprendere il proprio cammino, e questo deve avvenire secondo principi, in forza di determinati indizi, il che dipende appunto da come li si può fiutare» (*ibid.*). Ma, su come fiutarli, non ci sono regole.

Neppure Leibniz ci offre una logica della scoperta, sebbene abbia affermato con tanta convinzione di possederla che, dopo la sua morte, «tutti i dotti deplorarono che essa fosse rimasta sepolta nella tomba del grand'uomo» (ivi, I, 389). A Leibniz dev'essere accaduto ciò che si sospetta sia accaduto agli alchimisti, cioè che, «in seguito al disvelamento di tanti singolari arcani, essi avessero finito per credere che nulla fosse ormai più fuori della loro portata non appena avessero posto mano all'impresa, e che quasi in grazia della rapidità delle loro previsioni avessero dato per realizzate cose che argomentavano potessero, anzi dovessero, accadere non appena si fossero decisi a pensare di eseguirle» (ivi, I, 390).

Che né la logica delle scuole né Bacon né Leibniz ci abbiano dato una logica della scoperta non è, secondo Kant, un loro limite ma dipende dalla natura stessa della logica. Questa è la «scienza delle leggi necessarie dell'intelletto e della ragione in generale, o, che è lo stesso, della semplice forma del pensiero in generale» (ivi, IX, 13). In quanto «scienza che si riferisce a tutto il pensiero in generale, senza considerare gli oggetti che sono

la materia del pensiero», essa è «la propedeutica di ogni uso dell'intelletto. Ma poiché astrae completamente da tutti gli oggetti, essa non può essere un organo delle scienze», intendendo «per organo un'indicazione del modo in cui una determinata conoscenza deve essere ottenuta» (*ibid.*).

La logica non può essere un organo delle scienze perché questo richiederebbe che si conoscesse «già l'oggetto della conoscenza che si tratta di produrre secondo certe regole» (*ibid.*). Quindi richiederebbe di «uscire fuori dal concetto dato, per considerare il suo rapporto con qualcosa di totalmente diverso da ciò che era pensato in esso» (ivi, III, 143). In altri termini, richiederebbe di formulare un giudizio sull'oggetto. Ma nessuno «può arrischiarsi, mediante la logica, a formulare giudizi su oggetti o ad affermare alcunché su di essi» (ivi, III, 80). Quando lo si fa la logica, «che è semplicemente un canone di valutazione, viene usata come un organo di effettiva produzione di conoscenze oggettive, mentre non produce che illusioni», conducendo solo «ai vuoti discorsi di chi, a piacer suo, affermi con qualche apparenza o neghi a capriccio qualunque cosa gli piaccia» (ivi, III, 80-81).

È vero che «alcuni credono che la logica sia un'euristica (arte della scoperta), cioè un organo di nuova conoscenza col quale si fanno nuove scoperte, così per es. l'algebra è euristica; ma la logica non può essere un'euristica perché fa astrazione da ogni contenuto della conoscenza» (Kant 1998, II, 279). Essa «non serve ad ampliare la nostra conoscenza, ma semplicemente a vagliarla e a correggerla» (Kant 1900-, IX, 13). Perciò non può essere «un'arte universale della scoperta né un organo della verità: non un'algebra con l'aiuto della quale si possano scoprire verità nascoste» (ivi, IX, 20).

2. Il ruolo del genio

La scoperta, secondo Kant, non avviene basandosi sulla logica ma è opera del genio, grazie al quale soltanto si ottiene «un ampliamento della conoscenza dell'intelletto e della ragione» (ivi, XV, 407).

È vero che «nella matematica il genio si manifesta propriamente attraverso l'invenzione di un nuovo metodo» (ivi, XV, 362). Ma tale invenzione non ammette regole. Il genio è proprio «il talento di produrre ciò di cui non si può dare una regola determinata: non un'attitudine particolare a ciò che può essere appreso mediante una regola» (ivi, V, 307). Il genio non segue regole già date ma è «la fonte delle regole» (ivi, XVI, 128). Esso «si pone al di sopra delle regole e detta le leggi» (ivi, XV, 361). Perciò è capace di «far epoca in tutto ciò che intraprende (Newton, Leibniz)» (ivi, VII, 226).

Come l'uomo di genio fa le sue scoperte è qualcosa che neppure lui sa spiegare, perché «non può mostrare scientificamente come compie la sua produzione» (ivi, V, 308). L'autore di un'opera «che deve al proprio genio

non sa egli stesso come le idee se ne trovino in lui, né ha la facoltà di trovarne a suo piacere o metodicamente delle altre, e di fornire agli altri dei precetti che li mettano in condizione di eseguire gli stessi prodotti» (*ibid.*). In effetti «la parola genio deriva da 'genius', che significa lo spirito proprio di un uomo, quello che gli è stato dato con la nascita, che lo protegge, lo dirige, e dalla cui ispirazione provengono quelle idee originali» (*ibid.*).

Certo, la psicologia può studiare come l'uomo di genio fa le sue scoperte, ma non offre una base adeguata per una logica della scoperta, perché introduce principi psicologici nella logica, e introdurre tali principi «nella logica è tanto assurdo quanto desumere la morale dalla vita» (ivi, IX, 14). Attraverso principi psicologici si vedrebbe solo «come si svolge il pensiero e come esso è sottoposto alle diverse difficoltà e condizioni soggettive», e ciò «porterebbe allora alla conoscenza di leggi puramente contingenti» (*ibid.*).

Perciò «tutte le osservazioni psicologiche devono essere escluse dalla logica» (ivi, XXIV, 694). Questa è «una dottrina dimostrata, e in essa tutto dev'essere rigidamente a priori» (ivi, III, 77). Essa «non trae nulla (come talora si è creduto) dalla psicologia, la quale pertanto non ha assolutamente alcuna influenza sul canone dell'intelletto» (ivi, III, 76-77). Nella logica «non si tratta di regole contingenti ma necessarie, non di come pensiamo ma di come dobbiamo pensare» (ivi, IX, 14). In essa «non vogliamo sapere come l'intelletto è e pensa e come ha proceduto finora nel pensare, ma come dovrebbe procedere nel pensare» (*ibid.*). Dunque la logica non è descrittiva ma normativa.

3. La natura del metodo

Secondo Kant, il metodo può essere desunto solo a posteriori, dopo che la matematica «è già stata trovata ed è stata portata ad un certo livello» (ivi, XXIV, 610). Perciò esso non serve per trovare nuove conoscenze, bensì solo per perfezionare conoscenze già acquisite. Che il metodo possa essere desunto solo a posteriori dipende dal fatto che, solo una volta che la matematica «abbia raggiunto una certa ampiezza e un certo assetto, risulta chiaro per quale via si deve procedere affinché raggiunga la perfezione e, cancellate le macchie dell'errore e del pensare confuso, risplenda più pura» (ivi, II, 410). Ma allora, considerato «in relazione al cammino della ragione umana», il metodo non è il primo bensì «l'ultimo termine a cui essa perviene», allorché la scienza matematica «è già da tempo compiuta e non le occorre che un'ultima mano per la sua correttezza e perfezione» (ivi, III, 76).

Il metodo perfeziona conoscenze già acquisite in quanto le organizza. L'organizzazione è importante perché solo attraverso essa la conoscenza raggiunge la forma scientifica. Senza di essa la conoscenza sarebbe un aggregato e non una scienza, perché una «scienza è un tutto della

conoscenza inteso come sistema e non semplicemente come aggregato» (ivi, IX, 139). L'organizzazione permette di «legare il molteplice della conoscenza per farne una scienza» (*ibid.*). Perciò il metodo è «il modo in cui una conoscenza può raggiungere una forma scientifica» (ivi, XXIV, 779).

Ma qual è per Kant il metodo della matematica? In essa sono stati usati due metodi, il metodo sintetico, ossia assiomatico, e il metodo analitico. Essi differiscono per il fatto che, «col metodo sintetico si comincia con i principi e si procede verso cose che si basano sui principi; col metodo analitico si procede da cose che si basano sui principi verso i principi» (ivi, II, 492). Il metodo sintetico «va dai principi alle conseguenze», il metodo analitico «inizia dal condizionato e da ciò che è fondato e procede ai principi (*a principiatis ad principia*)» (ivi, IX, 149). La «sintesi procede discendendo», mentre «l'analisi procede ascendendo» (ivi, XXIV, 110).

Tradizionalmente, il metodo analitico è stato considerato il metodo della scoperta e il metodo sintetico il metodo della giustificazione, ma a Kant questo appare insoddisfacente. È vero che il metodo analitico aiuta a capire come si può trovare la soluzione di un problema, e perciò è anche detto «metodo dell'invenzione» (*ibid.*). Ma questo non significa che esso sia un metodo di scoperta in senso proprio. Infatti, un metodo deve permettere di procedere con certezza, mentre il metodo analitico fa sì risalire da un problema alle ipotesi, ma «senza certezza, come sempre accade quando da effetti dati si conclude a cause determinate» (ivi, III, 192).

In realtà metodo analitico e metodo sintetico sono solo due diversi modi in cui la conoscenza può raggiungere forma scientifica.

Tra essi, secondo Kant, «al fine della popolarità», ossia della comprensibilità da parte di tutti, anche delle persone meno dotte, «è più adatto il metodo analitico» (ivi, IX, 149). Esso, infatti, non parte da principi astratti ma dal concreto, dal problema da risolvere, e perciò «si combina sempre con la popolarità, perché quando si risale ai principi invece di dover cominciare da essi, si acquista familiarità con le conoscenze astratte» (Kant 1998, II, 492). Per adattarmi alla capacità di altri uomini, «io comincio con i loro concetti comuni, cerco una regola basata su di essi, poi cerco di trarne un principio comune, e così salgo da conoscenze più basse a conoscenze elevate. Quando si è saliti a conoscenze astratte mediante l'analisi, allora le si può conoscere molto più facilmente in concreto», perché in tal caso «si deve solo badare alla conoscenza che prima si era presa come fondamento» (*ibid.*).

Ma, «al fine dell'elaborazione scientifica e sistematica della conoscenza, è più adatto il metodo sintetico» (Kant 1900- , IX, 149). Esso, infatti, riconduce «la grandissima molteplicità della conoscenza dell'intelletto al minor numero possibile di principi (condizioni universali), realizzando così la più alta unità» (ivi, III, 241). Grazie ad esso un aggregato inarticolato di conoscenze riceve un'unità sistematica e così si trasforma in una scienza, perché «l'unità sistematica è ciò che trasforma una conoscenza comune in scienza» (ivi, III, 538). Anche se tale conoscenza è stata trovata mediante il

metodo analitico, è il metodo sintetico che la costituisce in scienza, perciò esso è il metodo della matematica in quanto scienza. Dunque «il metodo matematico è un metodo sintetico» (ivi, XXIV, 779).

Quest'ultimo fonda ogni teoria matematica su un sistema di assiomi, che sono anche detti «proposizioni fondamentali in quanto a partire da essi si possono dimostrare altri giudizi; essi stessi, però, non possono essere subordinati a nessun altro giudizio» (ivi, IX, 110). Le proposizioni fondamentali sono immediatamente certe e indimostrabili, o meglio, «quand'anche fossero suscettibili di dimostrazione in qualche altra scienza, nondimeno in essa sono considerate certe in maniera immediata» (ivi, II, 281). Da esse si deducono i teoremi per mezzo di inferenze logiche. In questo modo il metodo sintetico permette di ottenere una trattazione sistematica delle conoscenze, perché «si è trattata sistematicamente una conoscenza» solo quando «si è pensato secondo un metodo e poi questo metodo viene espresso anche nell'esposizione, ed è indicato distintamente il passaggio da una proposizione all'altra» (ivi, IX, 148).

4. La concezione concreta

Quale concezione ha Kant del metodo sintetico, ossia assiomatico? La sua concezione è l'unica esistente alla sua epoca, ossia la concezione concreta, una concezione che ha dominato dall'antichità fino alla fine dell'Ottocento e la cui espressione più nota sono gli *Elementi* di Euclide.

Secondo tale concezione, costruire una teoria assiomatica vuol dire scegliere alcuni termini il cui significato è chiaro in sé, detti termini primitivi, e definire poi tutti gli altri termini a partire da essi, e scegliere alcune proposizioni la cui verità è evidente in sé, dette proposizioni primitive, e dimostrare poi tutte le altre proposizioni a partire da esse. Che il significato dei termini primitivi sia chiaro in sé implica che essi hanno un'unica interpretazione. Che la verità delle proposizioni primitive sia evidente in sé implica che esse sono vere rispetto ad un'unica interpretazione.

Le definizioni, gli assiomi e le dimostrazioni sono gli ingredienti essenziali della concezione concreta. Le definizioni sono la via attraverso la quale si ottengono i termini non-primitivi a partire da quelli primitivi. Gli assiomi sono le proposizioni primitive. Le dimostrazioni sono la via attraverso la quale si ottengono le proposizioni non-primitive a partire da quelle primitive.

5. Condizioni sui sistemi di assiomi

Non tutti i sistemi di assiomi, però, sono adeguati. Secondo Kant un sistema di assiomi, per essere adeguato, deve soddisfare le seguenti condizioni.

1) *Coerenza*. Partendo dagli assiomi non si possono dimostrare proposizioni contraddittorie tra loro. Infatti «per la verità logica di una conoscenza si richiede, in primo luogo, che essa sia logicamente possibile, ossia che non si contraddica», perché «una conoscenza che si contraddice è sicuramente falsa» (ivi, IX, 51). Ogni concetto «è sottoposto al principio di determinabilità, in base al quale, di due predicati qualsiasi in opposizione contraddittoria tra loro, uno solo può appartenergli», e tale principio «ha il suo fondamento nel principio di contraddizione» (ivi, III, 385).

Il principio di determinabilità è, però, una condizione necessaria ma non sufficiente per la verità di una conoscenza perché, mentre «una conoscenza che si contraddice è sicuramente falsa», una conoscenza, «se non si contraddice, non sempre è vera» (ivi, IX, 51). Infatti «un nostro giudizio può essere esente da contraddizione e tuttavia unire i concetti in un modo contrastante con l'oggetto», dunque può unirli anche se manca un fondamento che giustifichi il giudizio stesso; perciò «il giudizio, pur essendo esente da ogni contraddizione interna, può risultare falso o infondato» (ivi, III, 141).

Dunque, «che un concetto non debba risultare contraddittorio è una condizione logica necessaria ma per nulla sufficiente a garantire la realtà oggettiva del concetto, cioè la possibilità dell'oggetto che viene pensato mediante il concetto. Così, nel concetto di una figura chiusa tra due linee rette non vi è contraddizione», ma questo non assicura che essa abbia una realtà oggettiva, e infatti una tale figura è impossibile, dove la sua «impossibilità non risiede nel concetto stesso bensì nella sua costruzione nello spazio, ossia nelle condizioni dello spazio e della sua determinazione» (ivi, III, 187). Pertanto, il principio di determinabilità «vale come *conditio sine qua non* della verità della nostra conoscenza, ma non è la ragione determinante di tale verità» (ivi, III, 142).

2) *Completezza*. Per ogni proposizione del sistema, si può dimostrare o essa o la sua negazione a partire dagli assiomi del sistema. Infatti «ogni cosa, rispetto alla sua possibilità, è sottoposta al principio di determinazione completa, in base al quale, di tutti i possibili predicati delle cose, in quanto essi vengono confrontati con i loro opposti, uno dei due deve sempre appartenere alla cosa» (ivi, III, 385). Poiché i predicati delle cose sono stabiliti in base agli assiomi, dal principio di determinazione completa segue che il sistema di assiomi dev'essere completo.

A differenza del principio di determinabilità, il principio di determinazione completa «non si fonda esclusivamente sul principio di contraddizione; infatti, oltre a considerare ogni cosa in relazione a due predicati tra loro contraddittoriamente conflittuali, esso considera anche ogni cosa in rapporto alla possibilità tutta intera, quale totalità dei predicati delle cose in generale» (*ibid.*). Il principio di determinazione completa è «il principio della sintesi di tutti i predicati che devono determinare il concetto completo di una cosa, e non dunque il semplice principio della

rappresentazione analitica mediante uno di due predicati opposti» (ivi, III, 386).

3) *Decidibilità*. Esiste un metodo per determinare, per ogni proposizione del sistema, se essa è dimostrabile o non è dimostrabile a partire dagli assiomi del sistema. In virtù di tale metodo ogni problema del sistema è suscettibile di una rigorosa sistemazione, o riuscendo a darne una soluzione, oppure mostrando l'impossibilità di una sua soluzione a partire dagli assiomi del sistema. Ciò è essenziale perché è nella natura di scienze come la matematica «che ogni questione da esse sollevata debba poter ottenere immediatamente una risposta a partire da ciò che si sa», cioè a partire dagli assiomi e dalle proposizioni già dimostrate, «senza dunque che sia lecito appellarsi ad un'irrimediabile ignoranza, ma dovendosi fornire una soluzione in ogni caso» (ivi, III, 330). Se di un problema non si riesce a trovare una soluzione a partire dagli assiomi e dalle proposizioni già dimostrate, si deve stabilire «con certezza se non altro l'impossibilità di una tale soluzione» (ivi, III, 332).

Non è «così straordinario, come sembra a prima vista, che una scienza possa richiedere e aspettarsi soltanto risposte sicure a tutte le questioni nel suo campo (*quaestiones domesticae*), anche se non sono state trovate finora» (*ibid.*). Infatti «nessun problema concernente un oggetto dato alla ragione pura», qual è un oggetto matematico, «è insolubile per questa stessa ragione umana» (ivi, III, 331). Ciò dipende dal fatto che, «proprio quel medesimo concetto che ci rende possibile l'impostazione del problema, deve anche renderne possibile la completa soluzione, perché l'oggetto non si trova affatto fuori del concetto» (*ibid.*).

Può accadere, però, che un concetto sia insufficiente per trovare una soluzione del problema a partire dagli assiomi del sistema. In tal caso si deve stabilire l'impossibilità di una tale soluzione. È quanto è avvenuto, ad esempio, col problema di determinare «quale sia, in numeri razionali o irrazionali, l'esatto rapporto che sussiste tra il diametro e la circonferenza» (ivi, III, 332). Poiché «risulta impossibile formularlo adeguatamente per mezzo dei numeri razionali e poiché non è stato ancora trovato il suo valore in numeri irrazionali», nacque la convinzione che non se ne potesse trovare il valore in numeri irrazionali, e «Lambert ne offrì la dimostrazione» (*ibid.*).

6. La filosofia come logica della giustificazione

Poiché per Kant non può esistere una logica della scoperta, qual è per lui il ruolo della filosofia nei confronti della matematica? Secondo Kant, essa deve giustificare la matematica attraverso un'indagine del suo fondamento. In quanto tale essa svolge, nei confronti della matematica, il ruolo di una logica della giustificazione.

Una tale logica non serve a rendere più certa la matematica, perché questa è «una grande e verificata conoscenza, che già ora è di una meravigliosa estensione e promette per l'avvenire un espandersi senza limiti: conoscenza che ha in sé, da parte a parte, una certezza apodittica, cioè una assoluta necessità» (ivi, IV, 280). Essa serve invece a chiarire il fondamento della matematica, ossia la base della sua certezza apodittica.

Per farlo, essa deve dare una risposta alla domanda: come è possibile la matematica? Poiché le conoscenze matematiche «sono effettivamente date, conviene di certo domandarsi come esse sono possibili» (ivi, III, 40). Non ci si deve invece domandare «se sono possibili. Esse infatti sono date a sufficienza, e certo con una realtà di incontestabile certezza» (ivi, IV, 276). Occorre dunque assumere come dato di fatto che la conoscenza matematica è possibile e reale, ma «indagare il fondamento di tale possibilità e domandare come è possibile questa conoscenza, per porci in condizione di determinare, secondo i principi della sua possibilità, le condizioni del suo uso, la sua estensione e i suoi limiti» (*ibid.*).

Una tale indagine «non si propone l'ampliamento delle conoscenze» (ivi, III, 43). Non mira ad un'estensione della matematica, quindi «non serve da organo per l'estensione» (ivi, III, 517). Da essa la matematica può trarre «vantaggio non certo nel contenuto», ma in quanto può servire «per chiarire meglio la propria natura» (ivi, IV, 280). Nei confronti della matematica essa non ha una funzione ampliativa ma soltanto una funzione di fondazione trascendentale, ossia di fondazione tendente a «costituire la possibilità di quest'ultima» (ivi, IV, 279).

7. Il metodo della logica della giustificazione

Ma su quali metodi può basarsi una logica della giustificazione? Secondo Kant, sugli stessi metodi su cui si basa la matematica, ossia il metodo sintetico e il metodo analitico, perché «nel filosofare si può procedere sinteticamente e analiticamente» (ivi, XXIV, 779). Certo, il metodo sintetico è il più adatto per trattare il sistema della ragion pura, ossia il sistema di tutti i principi della conoscenza a priori, perché permette di «sviluppare la conoscenza dai suoi germi originari» (ivi, IV, 274). Nondimeno, per trattare il problema di come è possibile la matematica, si può anche ricorrere al metodo analitico, e questo per almeno due ragioni.

In primo luogo, il problema di come è possibile la matematica non riguarda il sistema della ragion pura, cioè il sistema di tutti i principi della conoscenza a priori, ma soltanto la fonte da cui tale conoscenza scaturisce. Un'indagine di tale problema è soltanto una «propedeutica al sistema della ragion pura» (ivi, III, 43). Essa, infatti, si propone di risolvere il problema di come una scienza è possibile «piuttosto che esporre la stessa» (ivi, IV, 274).

In secondo luogo, per «mostrare la possibilità della matematica», la filosofia «non ha assiomi, e non è in grado di imporre i suoi principi a priori in modo così assoluto, ma deve adattarsi a giustificare la loro autorità» (ivi, III, 481). Essa, quindi, non può «contare sulle sue premesse trascendentali con tanto ardire, come se non fosse necessario per essa volgersi spesso indietro per considerare se nel corso delle sue inferenze non si annidino eventuali errori, sfuggiti nei principi e tali da obbligare o a determinarli meglio oppure a mutarli del tutto» (ivi, III, 482). Perciò una «proposizione sintetica della ragion pura e trascendentale è infinitamente lontana dall'essere altrettanto evidente (come si usa dire con arroganza) della proposizione: due per due fanno quattro» (ivi, III, 481).

Per queste ragioni, nella logica della giustificazione Kant ricorre al metodo analitico.

3
La concezione fondazionalista e la certezza

1. La possibilità della conoscenza sintetica a priori

Abbiamo visto che per Kant la matematica è conoscenza che ha in sé una certezza apodittica. Ma, per affrontare col metodo analitico il problema di come è possibile la matematica pura, Kant non si limita ad assumere questo, assume anche che essa sia conoscenza sintetica a priori, sintetica in quanto è ampliativa, cioè estende la nostra conoscenza, e a priori in quanto è pura, cioè è indipendente dall'esperienza. Egli afferma infatti che, «dovendo il metodo che ora seguiamo essere analitico, noi metteremo come punto di partenza il fatto che una tale conoscenza razionale sintetica ma pura è reale» (Kant 1900-, IV, 276).

A questo punto nasce, però, il problema di «come è possibile questa conoscenza» (*ibid.*). Cioè: come è possibile la conoscenza sintetica a priori nella matematica?

Per risolvere tale problema Kant fa appello all'intuizione, cioè ad una conoscenza «che si riferisce all'oggetto immediatamente ed è singolare» (ivi, III, 250). Più specificamente, Kant fa appello ad un particolare tipo di intuizione, l'intuizione pura, cioè un'intuizione in cui «nulla è riscontrabile che appartenga alla sensazione», a differenza dell'intuizione empirica, «che si riferisce all'oggetto mediante la sensazione» (ivi, III, 50).

Kant fa appello all'intuizione in quanto afferma che la conoscenza matematica ha la caratteristica che essa deve costruire i suoi concetti, cioè deve esibirli «nell'intuizione sebbene a priori, quindi in un'intuizione che non è empirica ma pura, senza la quale essa non può fare neppure un passo» (ivi, IV, 281). A chi «per primo dimostrò il triangolo isoscele (che si chiamasse Talete o in qualunque altro modo), si presentò una luce; egli trovò infatti che non doveva seguire le tracce di ciò che vedeva nella figura, né seguire le tracce del suo mero concetto, per apprenderne per così dire le proprietà, ma doveva produrre ciò che vedeva nella figura attraverso ciò che egli pensava in

essa e presentava a priori (mediante costruzione) secondo i concetti stessi» (ivi, III, 9).

Che la conoscenza matematica debba costruire i suoi concetti dipende dal fatto che la matematica «non può concludere nulla con il semplice concetto», e perciò «si volge subito all'intuizione per considerarvi il concetto in concreto, non però empiricamente ma in un'intuizione che essa rappresenta a priori, ossia che ha costruito e in cui ciò che deriva dalle condizioni universali della costruzione deve avere validità universale anche per l'oggetto del concetto costruito» (ivi, III, 470).

Per esempio, per stabilire che la somma degli angoli di un triangolo è eguale a due retti, non basta il concetto di triangolo perché, per quanto io rifletta su questo concetto, non potrò «mai trarne qualcosa di nuovo» (*ibid.*). Per stabilirlo, «non devo guardare a quello che penso nel mio concetto di triangolo (che non è altro che la sua mera definizione), ma devo andare al di là di esso, verso proprietà che non sono insite in tale concetto e tuttavia gli appartengono. Ma questo è possibile solo se io determino il mio oggetto secondo le condizioni dell'intuizione», si intende, «dell'intuizione pura» (ivi, III, 471-472).

Parimenti, per stabilire che $7+5=12$, non basta il concetto della somma di 7 e 5, perché esso «non contiene niente di più che l'unione di due numeri in un numero unico, col che non penso affatto quale sia questo numero unico che li racchiude insieme», perciò, «per quanto a lungo io possa analizzare il mio concetto di una tale somma possibile, pure non vi troverò il dodici» (ivi, IV, 268-269). Per trovarlo devo «oltrepassare questi concetti, ricorrendo all'intuizione corrispondente ad uno di questi numeri», e «aggiungendo a poco a poco le unità del cinque, dato nell'intuizione, al concetto del sette» (ivi, IV, 269).

Persino per stabilire una proposizione dell'aritmetica generale o algebra, alla matematica non basta il concetto generale di quantità, ma essa «esibisce nell'intuizione tutte le procedure mediante le quali la quantità viene generata e alterata secondo certe regole; quando una quantità dev'essere divisa per un'altra, essa mette insieme i loro simboli secondo la forma designata della divisione ecc., e ottiene così mediante una costruzione simbolica ciò che la geometria ottiene mediante una costruzione ostensiva o geometrica (degli oggetti stessi), che la conoscenza discorsiva non potrebbe mai ottenere mediante meri concetti» (ivi, III, 471). Dunque il procedimento dell'algebra, anche se «non è una costruzione geometrica, tuttavia è una costruzione per caratteri, in cui si espongono nell'intuizione mediante segni i concetti, specialmente quelli delle relazioni di quantità, e, senza considerare l'aspetto euristico, si pongono al sicuro dagli errori tutte le inferenze mettendole sotto gli occhi una ad una» (ivi, III, 481).

Stabilendo che la conoscenza matematica deve costruire i suoi concetti, Kant risolve il problema di come è possibile la conoscenza sintetica

a priori nella matematica. Essa è possibile perché l'intuizione pura, nella quale viene esibito il concetto, ci permette di ampliare sinteticamente e a priori, «mediante nuovi predicati presentatici dalla stessa intuizione, il concetto che ci facciamo di un oggetto» (ivi, IV, 281). Costruendo un concetto, cioè esibendolo nell'intuizione pura, noi ampliamo il concetto che ci facciamo di un oggetto e così estendiamo la nostra conoscenza.

Che la conoscenza matematica debba esibire i suoi concetti nell'intuizione pura significa che per Kant la matematica è una conoscenza che ha in sé una certezza che è non soltanto apodittica, bensì «intuitivamente apodittica» (ivi, XXIV, 892). Dunque la base della certezza apodittica della matematica sta nell'intuizione.

2. La possibilità dell'intuizione pura

La soluzione di Kant del problema di come è possibile la conoscenza sintetica a priori nella matematica riduce tale problema, e quindi il problema di come è possibile la matematica, al problema: come è possibile intuire qualcosa a priori?

Nel tentare di risolvere tale problema ci imbattiamo nella difficoltà che l'intuizione «ha luogo soltanto in quanto l'oggetto ci è dato» (ivi, III, 49). Essa, infatti, è «una rappresentazione quale dipenderebbe immediatamente dalla presenza dell'oggetto» (ivi, IV, 281). Perciò «intuire a priori originariamente sembra impossibile, perché allora l'intuizione dovrebbe aver luogo senza che l'oggetto a cui essa si riferisce sia presente né prima né al momento stesso» (ivi, IV, 281-282). Ma «come può l'intuizione dell'oggetto precedere l'oggetto?» (ivi, 282). Come può «trovarsi nell'animo un'intuizione esterna tale da precedere gli oggetti stessi, e nella quale il concetto di tali oggetti può essere determinato a priori?» (ivi, III, 54).

Secondo Kant, che «la mia intuizione preceda la realtà dell'oggetto e abbia luogo come conoscenza a priori, è possibile in un unico modo, cioè se essa non contiene altro che la forma della sensibilità, la quale precede nel mio soggetto tutte le impressioni reali da cui sono affetto da parte degli oggetti. Ed infatti, che gli oggetti dei sensi possano essere intuiti soltanto secondo questa forma della sensibilità io posso saperlo a priori» (ivi, IV, 282). D'altra parte, però, da ciò segue che «le intuizioni che sono possibili a priori non possono mai riguardare altro che gli oggetti dei nostri sensi» (*ibid.*). Dunque «noi possiamo intuire cose a priori soltanto mediante la forma dell'intuizione sensibile, con la quale però conosciamo, sì, anche gli oggetti, ma soltanto come essi possono apparire a noi (ai nostri sensi)» (ivi, IV, 283).

Ora, la forma dell'intuizione sensibile è data dallo spazio e dal tempo. Infatti, «se dalle intuizioni empiriche dei corpi e dei loro cambiamenti (movimento) si sopprime tutto ciò che è empirico, cioè ciò che appartiene alla sensazione, rimangono ancora spazio e tempo, che quindi sono intuizioni

pure, le quali stanno a priori a fondamento di quelle empiriche e perciò non possono mai mancare, ma appunto per il fatto che sono intuizioni pure a priori dimostrano di essere semplici forme della nostra sensibilità, le quali devono precedere ogni intuizione empirica, cioè la percezione di oggetti reali, e in conformità delle quali possono essere conosciuti a priori degli oggetti» (*ibid.*).

Pertanto «spazio e tempo sono quelle intuizioni che la matematica pone a fondamento di tutte le sue conoscenze e giudizi che si presentano nello stesso tempo come apodittici e necessari» (*ibid.*). In particolare, «la geometria pone a fondamento l'intuizione pura dello spazio. L'aritmetica costruisce i suoi concetti di numero mediante una successiva addizione di unità nel tempo» (*ibid.*).

Poiché spazio e tempo sono le intuizioni che la matematica pone a fondamento di tutte le sue conoscenze e sono la forma della sensibilità, l'intuizione che sta a fondamento della matematica, in quanto contiene la forma della sensibilità, è «un'intuizione sensibile ma pura» (ivi, II, 410). Tale intuizione, essendo sensibile ma pura, può contenere solo la forma della sensibilità, perché questa è «l'unica cosa che la sensibilità può fornire a priori» (ivi, III, 51).

Mentre l'intuizione che sta a fondamento della matematica è un'intuizione sensibile sebbene pura, l'intuizione intellettuale, ossia un'intuizione mediante la quale si acquisterebbe conoscenza unicamente in base a concetti, non può avere, secondo Kant, alcun posto nella matematica. Infatti una tale intuizione è impossibile per noi, perché «la nostra natura è tale che l'intuizione non può mai essere che sensibile, ossia tale da non contenere che il modo in cui siamo colpiti dagli oggetti» (ivi, III, 75). Per questo motivo «l'intelletto non può mai varcare i confini della sensibilità, nel cui ambito soltanto ci vengono dati gli oggetti» (ivi, III, 207). Dunque «ogni intuizione possibile per noi è sensibile» (ivi, III, 117).

Stabilendo che l'intuizione che sta a fondamento della matematica è un'intuizione sensibile pura, Kant risolve il problema di come è possibile intuire qualcosa a priori. Questo è possibile perché l'intuizione sensibile pura non contiene altro che la forma della sensibilità.

In questo modo Kant risolve anche il problema di come è possibile la matematica. Essa «è possibile solo in quanto non riguarda altri oggetti che quelli semplicemente sensibili, a fondamento della cui intuizione empirica sta un'intuizione pura (dello spazio e del tempo); e a fondamento vi sta certo a priori, e può starvi perché non è altro che la semplice forma della sensibilità, forma che viene prima della apparizione reale degli oggetti, in quanto proprio essa rende possibile questa» (ivi, IV, 283-284). L'intuizione sensibile pura «non riguarda la materia del fenomeno, ossia ciò che in esso è sensazione, perché questa costituisce l'elemento empirico; ma soltanto la forma di esso, spazio e tempo» (ivi, IV, 284).

3. La possibilità della costruzione

Nella soluzione di Kant del problema di come è possibile la matematica rimane, però, ancora da chiarire un punto. Abbiamo detto che per lui la conoscenza sintetica a priori nella matematica è possibile perché l'intuizione pura, nella quale viene esibito il concetto, ci permette di ampliare sinteticamente e a priori, mediante nuovi predicati presentatici dalla stessa intuizione, il concetto che ci facciamo di un oggetto. Questo lascia aperto il problema: come è possibile esibire un concetto nell'intuizione pura? Infatti il concetto è generale, essendo «una rappresentazione di ciò che è comune a più oggetti» (ivi, IX, 91). Invece l'intuizione pura è singolare. Come è possibile esibire il generale nel singolare?

Secondo Kant, questo è possibile perché, quando si costruisce un concetto, lo si esibisce sì nell'intuizione pura, ossia in qualcosa che di per sé è singolare, ma in un modo che esprime «qualcosa di valido universalmente per tutte le possibili intuizioni che rientrano sotto lo stesso concetto» (ivi, III, 469).

Per esempio, sebbene una figura mediante la quale si costruisce il concetto di triangolo sia singolare, tuttavia «essa serve ad esprimere il concetto senza comprometterne l'universalità», perché in essa non si guarda alle particolari determinazioni della figura tracciata ma «si guarda sempre soltanto all'operazione della costruzione del concetto, rispetto a cui sono del tutto indifferenti le varie determinazioni, come la grandezza dei lati e degli angoli, e perciò si astrae dalle differenze che non alterano il concetto di triangolo» (*ibid*.).

Quali che siano le determinazioni della singola figura tracciata, alla sua base, come alla base di ogni altra figura tracciata per rappresentare il triangolo, c'è un'identica operazione di costruzione, comune a tutte queste figure. Tale operazione, che può anche essere detta schematica perché procede secondo uno schema, indipendentemente dalle determinazioni della singola figura tracciata, sta alla base di ogni rappresentazione del concetto di triangolo. La costruzione del triangolo è data da tale schema. La generalità dello schema fa sì che l'operazione di costruzione del triangolo valga per ogni triangolo, quale che sia la lunghezza dei suoi lati o la misura dei suoi angoli.

Costruire un concetto significa allora darne lo schema, dove lo «schema di un concetto» è «la rappresentazione del procedimento generale mediante il quale l'immaginazione fornisce al concetto stesso la sua immagine» (ivi, III, 135). Lo schema svolge un ruolo di mediazione tra il concetto generale e l'intuizione pura singolare, perché rende possibile esibire il concetto nell'intuizione pura. È vero, infatti, che quest'ultima è singolare, come è necessario perché «la matematica non considera l'universale che nel particolare, o meglio nel singolo» (ivi, III, 469). Ma «questo singolo è

determinato secondo alcune condizioni universali della costruzione», e perciò «l'oggetto del concetto a cui questo singolo corrisponde solo in quanto ne è lo schema, deve essere pensato come universalmente determinato» (*ibid.*).

Che costruire un concetto significhi darne lo schema, permette a Kant di rispondere all'obiezione di Eberhard che i sensi e l'immaginazione dell'uomo non possono farsi alcuna immagine precisa di un poligono di mille lati, ossia un'immagine per mezzo della quale essi possano distinguerlo, per esempio, da un poligono di novecentonovantanove lati.

Secondo Kant, quando «Archimede circoscrisse un poligono di novantasei lati intorno al cerchio, e ne inscrisse un altro simile al suo interno, per determinare di quanto il cerchio fosse più piccolo del primo poligono e più grande del secondo», egli esibì il concetto che egli aveva di tale poligono in un'intuizione, «ma non in quanto disegnò realmente il poligono (il che sarebbe stata una pretesa inutile e assurda), bensì in quanto conosceva la regola di costruzione del suo concetto», ossia lo schema, «e quindi la sua capacità di determinare la grandezza del poligono con l'approssimazione voluta a quella dell'oggetto stesso, e dunque di dare quest'ultimo nell'intuizione in conformità al concetto; così dimostrò pure la realtà della stessa regola, e dunque anche di questo concetto, per l'uso dell'immaginazione» (ivi, VIII, 212). Dunque non è necessario farsi un'immagine precisa di un poligono di mille lati, basta conoscere la regola di costruzione del suo concetto, ossia lo schema.

Questo significa, però, che per Kant la costruzione di un concetto non consiste nella sua effettiva esibizione in un'intuizione a priori, ma nella possibilità in linea di principio di una tale esibizione, possibilità che è data dallo schema. Costruire un concetto vuol dire darne lo schema.

4. Metodo assiomatico e costruzione

Poiché per Kant la conoscenza matematica deve costruire i suoi concetti e il metodo della matematica è il metodo assiomatico, per lui definizioni, assiomi, dimostrazioni, ossia gli ingredienti del metodo assiomatico, devono essere esibiti nell'intuizione sensibile pura. Questo ha alcune implicazioni.

1) Le definizioni matematiche «sono costruzioni di concetti formati originariamente» (ivi, III, 479). Quindi sono esibizioni di concetti nell'intuizione sensibile pura. Questo dà «la realtà oggettiva del concetto» (ivi, XI, 42-43). Perciò le definizioni matematiche sono definizioni reali, dove una definizione reale è una definizione «che chiarisce non soltanto un concetto, ma anche la sua realtà oggettiva» (ivi, IV, 158 nota). I concetti matematici sono dati interamente dalla loro definizione. Noi «non possediamo alcun concetto prima della definizione, perché è proprio questa a darci il concetto» (ivi, III, 479). Perciò «le definizioni matematiche non possono mai sbagliare. Infatti, poiché il concetto non è dato che attraverso la definizione,

esso contiene né più né meno di quello che la definizione esige che venga pensato con esso» (ivi, III, 479-480). I concetti matematici sono anche gli unici che hanno una definizione, perché non esistono «altri concetti suscettibili di definizione che quelli che racchiudono una sintesi arbitraria, che può essere costruita a priori; di conseguenza solo la matematica ha definizioni» (ivi, III, 478).

2) Gli assiomi sono proposizioni fondamentali che «possono essere esibite nell'intuizione» (ivi, IX, 110). Essi sono «accolti nella matematica solo perché possono essere esibiti nell'intuizione» (ivi, III, 38). Inoltre gli assiomi «sono possibili solo nella matematica» (ivi, XXIV, 767). Soltanto questa, infatti, «è in grado di congiungere a priori e immediatamente i predicati dell'oggetto, mediante la costruzione dei concetti nell'intuizione dell'oggetto stesso» (ivi, III, 480).

3) Il nome di dimostrazione «spetta soltanto ad una prova apodittica in quanto sia intuitiva» (ivi, III, 481). Infatti, tale nome «viene da *monstrare*, mostrare, porre dinanzi agli occhi. Perciò esso può essere usato in senso proprio e reale solo per prove in cui l'oggetto viene presentato nell'intuizione e in cui la verità viene conosciuta non solo in modo discorsivo ma anche intuitivo» (ivi, XXIV, 894). Poiché «da concetti a priori (nella conoscenza discorsiva) non può mai derivare la certezza intuitiva», ne segue che «solo la matematica possiede dimostrazioni, perché ricava la conoscenza, anziché da concetti, dalla loro costruzione, ossia dall'intuizione, che può essere data a priori, in corrispondenza ai concetti» (ivi, III, 481).

4
L'influenza della concezione fondazionalista

1. La centralità dell'intuizione

Kant ha profondamente influenzato il modo in cui negli ultimi due secoli è stato concepito il rapporto tra la filosofia e la matematica. Ciò si può vedere, ad esempio, da Hilbert, il cui approccio è uno sviluppo diretto ed un'estensione di quello di Kant.

Hilbert riconosce che risolvere un problema matematico non consiste nel derivarne la soluzione da assiomi dati perché, «nelle ricerche aritmetiche, così come nelle ricerche geometriche, noi non seguiamo in ogni momento la catena delle operazioni mentali fino agli assiomi» (Hilbert 1970, III, 296). La soluzione di un problema matematico si ottiene invece «in base ad un numero finito di ipotesi che sono implicate nella posizione del problema e che devono essere formulate ogni volta con esattezza» (ivi, III, 293). Dunque la soluzione non si ottiene partendo dagli assiomi ma dalla formulazione del problema, in cui sono implicate le ipotesi per la sua soluzione.

Nondimeno per Hilbert una logica della scoperta matematica non può esistere, perché le ipotesi, pur essendo implicate nella formulazione del problema, non si possono ottenere da essa mediante inferenze logiche ma solo mediante l'intuizione. Infatti «in aritmetica, né più né meno che in geometria, specialmente al primo impatto con un problema, noi ricorriamo a certe combinazioni rapide, inconsapevoli, non assolutamente sicure, fidandoci di una certa sensibilità aritmetica per il comportamento dei segni aritmetici, senza la quale progrediremmo nell'aritmetica altrettanto poco quanto faremmo senza l'immaginazione geometrica nella geometria» (ivi, III, 296). Sia questa sensibilità aritmetica sia l'immaginazione geometrica si basano sull'intuizione, perciò per esse non possono darsi regole.

Per questo motivo la filosofia non può occuparsi dei processi mediante i quali si scoprono nuove conoscenze matematiche, ma solo di

quelli mediante i quali si giustificano conoscenze matematiche già acquisite. Per giustificarle, la filosofia deve indagarne il fondamento. La necessità di una tale indagine deriva dal fatto che «una scienza come la matematica non può sostenersi su credenze, per quanto forti esse siano, ma ha il dovere di una chiarificazione totale» (Hilbert 1931a, 488). Per raggiungere una chiarificazione totale, «dovunque emergano concetti matematici», la filosofia deve «indagare i principi che stanno alla base di questi concetti» (Hilbert 1970, III, 295).

2. La natura del metodo

Ma che cosa autorizza a pensare che un'indagine del fondamento sia possibile? Secondo Hilbert, il fatto che, quando esaminiamo un qualsiasi campo della matematica, presto ci accorgiamo che, per ottenere quell'intero campo, bastano pochi teoremi fondamentali, a partire dai quali possiamo dedurre tutti gli altri. Per esempio, «per ottenere l'intera vasta scienza della geometria euclidea mediante il solo strumento dell'analisi, bastano il teorema della linearità dell'equazione del piano e quello della trasformazione ortogonale delle coordinate dei punti» (ivi, III, 147).

In prima approssimazione «questi teoremi fondamentali possono essere considerati gli assiomi dei singoli campi conoscitivi» (*ibid.*). Una volta che essi sono stati individuati, «lo sviluppo successivo del singolo campo conoscitivo consiste soltanto nell'ulteriore perfezionamento logico dell'intelaiatura di concetti già prodotta» (*ibid.*).

Con l'individuazione di tali teoremi fondamentali, il problema della fondazione dei singoli campi conoscitivi trova una prima soluzione. Ma si tratta «soltanto di una soluzione provvisoria» (*ibid.*). Ben presto si fa «sentire l'esigenza di fondare gli stessi teoremi fondamentali ritenuti come assiomi» (ivi, III, 147-148). Una tale ulteriore fondazione si ottiene dandone una dimostrazione. Così «si è arrivati alle 'dimostrazioni' della linearità dell'equazione del piano e dell'ortogonalità di una trasformazione che esprime un movimento» (ivi, III, 148).

Ma un esame delle dimostrazioni dei teoremi fondamentali mostra che essi sono riconducibili «a certi teoremi più profondi che, a loro volta, possono quindi essere considerati come nuovi assiomi al posto dei teoremi da dimostrare. In questo modo sono sorti quelli che oggi vengono detti propriamente gli assiomi della geometria e dell'aritmetica» (*ibid.*). Tali nuovi assiomi «costituiscono un livello di assiomi più profondo rispetto a quello caratterizzato dalle proposizioni prima menzionate, poste originariamente alla base dei singoli campi conoscitivi» (*ibid.*). Si ottiene così «un approfondimento dei fondamenti dei singoli campi conoscitivi, quale diviene necessario in ogni costruzione man mano che la si sviluppa, la si innalza e ci si vuol garantire della sua sicurezza» (*ibid.*).

In generale, secondo Hilbert, «quando si tratta di indagare i fondamenti di una scienza, si deve fissare un sistema di assiomi che contenga una descrizione precisa e completa delle relazioni che sussistono tra i concetti elementari di quella scienza» (ivi, III, 299). Da quel punto in poi «ogni proposizione interna al dominio della scienza di cui esaminiamo i fondamenti la riteniamo vera solo se può essere derivata dagli assiomi mediante un numero finito di inferenze logiche» (ivi, III, 299-300). Gli assiomi hanno una funzione prescrittiva, nel senso che ogni ulteriore sviluppo di quella scienza dovrà ottenersi a partire da essi mediante un numero finito di inferenze logiche. Come punto di partenza delle dimostrazioni si potranno usare solo gli assiomi.

Si dice «assiomatico il procedimento che è qui coinvolto» (Hilbert 1900, 181). Dunque, «nel senso più ampio del termine, lo sviluppo di una teoria si dice assiomatico quando i concetti basilari e i presupposti basilari sono posti come tali all'inizio, e il rimanente contenuto della teoria viene derivato logicamente da essi mediante definizioni e dimostrazioni. In questo senso la geometria è stata fondata assiomaticamente da Euclide, la meccanica da Newton, la termodinamica da Clausius» (Hilbert-Bernays 1968-70, I, 1).

Il metodo assiomatico è, per Hilbert, il metodo della matematica. Esso «facilita la precisazione dell'impostazione del problema e aiuta a preparare la soluzione del problema» (Hilbert 1970, III, 379). È «logicamente incontestabile e nello stesso tempo è fecondo; garantisce inoltre all'indagine la più piena libertà di movimento» (ivi, III, 161). Con esso, «non solo il problema dato diventa più accessibile alla nostra indagine, ma nello stesso tempo arriviamo anche a possedere un metodo applicabile ai problemi affini» (ivi, III, 293). Inoltre, grazie all'approfondimento dei vari campi conoscitivi a cui esso porta, noi abbiamo «illuminazioni sempre più profonde sulla natura del pensiero scientifico, e diveniamo sempre più consapevoli dell'unità del nostro sapere» (ivi, III, 156). Si può dire perciò, addirittura, che «procedere assiomaticamente non è altro che pensare consapevolmente» (ivi, III, 161).

Di conseguenza, il metodo assiomatico non soltanto è il metodo della matematica, ma è «un metodo generale della ricerca scientifica nel suo complesso», sebbene «il suo più brillante trionfo si celebri nella matematica» (Hilbert 1992, 18). Esso «è e rimane davvero lo strumento indispensabile, adeguato al nostro spirito, per ogni indagine esatta in qualunque campo» (*ibid.*). In particolare, esso è essenziale «per la trattazione teorica delle questioni delle scienze della natura» (Hilbert 1970, III, 379). Di fatto, «tutto ciò che può essere oggetto del pensiero scientifico, non appena è maturo per la formazione di una teoria, cade sotto il metodo assiomatico, e per suo tramite sotto la matematica» (ivi, III, 156).

Ma, sebbene il metodo assiomatico sia il metodo della matematica e della ricerca scientifica nel suo complesso, secondo Hilbert, esso non è un metodo di scoperta di nuove conoscenze, bensì solo un metodo di

giustificazione di conoscenze già acquisite. L'esplorazione assiomatica di una verità matematica è «un'indagine che non mira a scoprire, rispetto a tale verità, nuovi o più generali teoremi, ma piuttosto cerca di chiarire la posizione di questo teorema nell'ambito del sistema delle verità note e la sua relazione logica, in modo che si possa dire con sicurezza quali condizioni sono necessarie e sufficienti per dare un fondamento a questa verità» (Hilbert 1902-3, 50).

3. La concezione astratta

Quale concezione ha Hilbert del metodo assiomatico? Non la concezione concreta adottata da Kant ma la concezione astratta, una concezione che, soprattutto grazie all'influenza dello stesso Hilbert, dalla fine dell'Ottocento ha in gran parte rimpiazzato quella concreta e la cui espressione più nota sono le *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert.

Secondo tale concezione, costruire una teoria assiomatica vuol dire scegliere in modo arbitrario alcuni termini, detti termini primitivi, e definire poi tutti gli altri termini a partire da essi, e scegliere in modo arbitrario alcune proposizioni, dette proposizioni primitive, e dimostrare poi tutte le altre proposizioni a partire da esse. I termini primitivi sono privi di significato in sé e possono avere più interpretazioni differenti. Le proposizioni primitive sono prive di valore di verità in sé e possono essere vere rispetto a più interpretazioni differenti.

Le principali differenze tra la concezione concreta e quella astratta riguardano, dunque, il significato dei termini primitivi e il valore di verità delle proposizioni primitive, e l'interpretazione dei termini primitivi e delle proposizioni primitive.

Mentre nella concezione concreta i termini primitivi hanno un significato chiaro in sé e le proposizioni primitive hanno un valore di verità evidente in sé, nella concezione astratta i termini primitivi sono privi di significato in sé e le proposizioni primitive sono prive di valore di verità in sé. Inoltre, mentre nella concezione concreta i termini primitivi hanno un'unica interpretazione e le proposizioni primitive sono vere rispetto ad un'unica interpretazione, nella concezione astratta i termini primitivi possono avere più interpretazioni e le proposizioni primitive possono essere vere rispetto a più interpretazioni.

Che i termini primitivi possano avere più interpretazioni e le proposizioni primitive possano essere vere rispetto a più interpretazioni è per Hilbert l'aspetto più importante della concezione astratta, perché grazie ad esso «ogni teoria può essere sempre applicata ad infiniti sistemi di elementi fondamentali» (Hilbert 1976, 67).

Le interpretazioni ammesse non si limitano a quelle matematiche ma possono comprendere anche interpretazioni non-matematiche. Per esempio,

«gli assiomi euclidei della congruenza lineare e gli assiomi sul concetto geometrico 'tra'» valgono per le deviazioni che si manifestano nella discendenza di certi moscerini in seguito ad opportuni incroci, e da ciò segue che «le leggi dell'ereditarietà si ricavano come applicazione degli assiomi della congruenza lineare» (Hilbert 1970, III, 379-380).

Le interpretazioni non-matematiche possono anche essere le più bizzarre. Per esempio, nel caso degli assiomi della geometria, «invece di 'punti, rette e piani', si deve sempre poter dire, 'tavoli, sedie e boccali di birra'» (ivi, III, 403). Oppure, «amore, legge, spazzacamino» (Hilbert 1976, 67). L'unica cosa che si richiede è che gli oggetti usati nell'interpretazione soddisfino gli assiomi, perché questo assicura che essi soddisferanno anche i teoremi. Così, nel caso degli oggetti geometrici, «basterà che io assuma tutti i miei assiomi come relazioni tra questi oggetti perché le mie proposizioni, per esempio il teorema di Pitagora, valgano anche per essi» (*ibid.*).

Rispetto alla concezione concreta, la concezione astratta non costituisce, però, una nuova forma del metodo assiomatico ma solo un nuovo modo di intenderlo, in particolare un nuovo modo di intendere i termini primitivi e le proposizioni primitive di un sistema di assiomi. Dunque, la differenza tra le due concezioni non sta nel sistema di assiomi in sé ma sta piuttosto nelle intenzioni di chi lo formula.

In particolare, le definizioni, gli assiomi e le dimostrazioni rimangono gli ingredienti essenziali anche della concezione astratta. Infatti, una volta fissati i termini primitivi e le proposizioni primitive di una teoria, «l'ulteriore contenuto della teoria viene derivato logicamente da essi mediante definizioni e dimostrazioni» (Hilbert-Bernays 1968-70, I, 1).

4. Condizioni sui sistemi di assiomi

Non tutti i sistemi di assiomi, però, sono adeguati. Secondo Hilbert un sistema di assiomi, per essere adeguato, deve soddisfare le seguenti condizioni.

1) *Coerenza*. Dagli assiomi «non si può mai arrivare, con un numero finito di inferenze logiche, a risultati che siano in contraddizione tra di loro» (ivi, III, 300). La coerenza è «una questione di somma importanza, perché ovviamente la presenza di una contraddizione in una teoria pregiudica la coerenza dell'intera teoria» (ivi, III, 150). Una contraddizione è temibile perché per mezzo di essa, «per quanto remota, possiamo dimostrare la falsità di ogni asserzione corretta. Perciò possiamo dire che una singola contraddizione nell'intero dominio della nostra conoscenza ha l'effetto di una scintilla in un barile di polvere da sparo e distrugge tutto» (Hilbert 1905b, 217).

Ma la coerenza è una questione di somma importanza anche sotto un altro aspetto, cioè perché, contrariamente a quanto ritiene Kant, essa è una

condizione non solo necessaria ma anche sufficiente per la verità degli assiomi. Infatti, «se assiomi dati arbitrariamente non sono in contraddizione tra loro, con tutte le loro conseguenze, allora essi sono veri» (Hilbert 1976, 66). Dunque «'coerente' è identico a 'vero'», e parimenti «'falso' e 'portante ad una contraddizione' sono identici» (Hilbert 1931b, 122-123). Tuttavia nel parlare di verità è chiaro che Hilbert non intende la verità in un senso reale. Vuole soltanto dire che l'unico senso in cui il matematico ha bisogno di parlare di verità degli assiomi è che essi sono coerenti.

2) *Completezza*. Il sistema di assiomi «basta per la dimostrazione di tutti i teoremi» (Hilbert 1900, 181). Questo non significa semplicemente che esso basta per la dimostrazione di tutti i teoremi attualmente noti. Ciò, infatti, permetterebbe soltanto di «affermare su base empirica che, in tutte le applicazioni, questo sistema di assiomi ha avuto successo» (Hilbert-Ackermann 1928, 68). Ma non garantirebbe che in futuro non si possano trovare nuovi teoremi non dimostrabili a partire dagli assiomi. Significa, invece, che il sistema di assiomi basta per dimostrare tutti i teoremi possibili, sia quelli attualmente noti sia quelli futuri.

Per mostrare che un sistema di assiomi è completo è necessario e sufficiente far vedere che, per ogni proposizione *A* del sistema, si può dimostrare o *A* oppure la sua negazione a partire dagli assiomi del sistema. Questa condizione fa riferimento non soltanto ai teoremi attualmente noti ma a tutte le proposizioni del sistema.

3) *Decidibilità*. Esiste un metodo meccanico per determinare, per ogni proposizione del sistema, se essa è dimostrabile o non è dimostrabile a partire dagli assiomi del sistema. In virtù di tale metodo ogni problema del sistema è «suscettibile di una rigorosa sistemazione, o riuscendo a dare una soluzione alla questione posta oppure mostrando l'impossibilità di una sua soluzione e quindi la necessità dell'insuccesso di ogni tentativo» (Hilbert 1970, III, 297).

L'importanza di questo requisito deriva dal fatto che, se per qualche problema non si potesse darne una soluzione né si potesse mostrare l'impossibilità di una sua soluzione a partire dagli assiomi del sistema, non si potrebbe affermare che il sistema determina i suoi concetti.

5. La metamatematica come logica della giustificazione

Poiché per Hilbert non può esistere una logica della scoperta, qual è per lui il ruolo della filosofia nei confronti della matematica? Secondo Hilbert, essa deve giustificare la matematica attraverso un'indagine del suo fondamento. In quanto tale essa svolge, nei confronti della matematica, il ruolo di una logica della giustificazione.

Una tale logica non serve a rendere più certa la matematica, perché questa è già conoscenza assolutamente certa. In essa, «nonostante le

combinazioni più ardite e più varie nell'uso dei metodi più raffinati, domina un completa sicurezza del ragionamento e un manifesto accordo tra tutti i risultati» (ivi, III, 159).

È vero che Hilbert talora dice di porsi «l'obiettivo di dare una sicurezza definitiva al metodo matematico» (Hilbert 1926, 162). Questo potrebbe suggerire che per lui la matematica non sia già conoscenza assolutamente certa. Ma si tratta soltanto di un modo improprio di esprimersi, perché in realtà sulla certezza della matematica egli non nutre alcun dubbio. A suo parere una logica della giustificazione è necessaria «non tanto per consolidare singole teorie matematiche», quanto piuttosto perché «tutte le indagini finora svolte sui fondamenti della matematica non hanno ancora fatto conoscere una via che renda possibile formulare ciascuna questione sui fondamenti in un modo tale che ne debba seguire una risposta univoca» (Hilbert 1970, III, 157).

Una logica della giustificazione non serve, dunque, a rendere più certa la matematica, ma a chiarire la base della sua certezza. Solo perché è convinto della certezza della matematica Hilbert può dichiarare che «ai filosofi certamente interesserà che esista una scienza come la matematica. Noi matematici abbiamo il dovere di custodirla come un santuario, perché un giorno tutta la scienza umana divenga partecipe della stessa precisione e chiarezza. Che ciò debba avvenire e avverrà è mia ferma convinzione» (Hilbert 1931a, 494).

Una logica della giustificazione, secondo Hilbert, non può basarsi, però, sugli strumenti tradizionali dell'analisi filosofica. Mentre per Kant quegli strumenti erano adeguati allo scopo, per Hilbert non lo sono più. A suo parere una logica della giustificazione deve basarsi, invece, sugli strumenti della logica matematica. La matematica «per la sua fondazione non ha bisogno né del buon Dio, come Kronecker, né dell'assunzione di una particolare capacità del nostro intelletto sintonizzata col principio di induzione completa, come Poincaré, né dell'intuizione originaria di Brouwer, e neppure infine, come Russell e Whitehead, di assiomi dell'infinito, di riducibilità o di completezza, che sono ipotesi realmente contenutistiche» (Hilbert 1928, 85). Quella della matematica dev'essere un'autofondazione.

Ciò si ottiene basandosi sugli strumenti della logica matematica, perché quest'ultima è una parte della matematica, anche se non si occupa delle questioni tradizionali della matematica bensì del metodo della matematica. Essa, perciò, può anche essere detta metamatematica. Così alla «matematica vera e propria si aggiunge una matematica in certo senso nuova, una metamatematica» (Hilbert 1970, III, 174). In essa le dimostrazioni della matematica «costituiscono l'oggetto stesso dell'indagine» (ivi, III, 180). Mentre la matematica procede mediante dimostrazioni, la metamatematica le assume come oggetto di indagine.

La metamatematica non si propone l'ampliamento delle conoscenze matematiche, quindi non mira ad un'estensione della matematica. Da essa questa può trarre vantaggio non certo nel contenuto ma solo in quanto può chiarire la base della sua certezza. Il suo scopo è quello di far «scomparire definitivamente le questioni fondazionali nella matematica in quanto tali» (Hilbert 1929, 3). Una volta raggiunto tale scopo, i matematici potranno continuare a far matematica come prima, con gli stessi metodi di prima. Dunque la metamatematica non vuol cambiare la prassi matematica, ma solo impedire definitivamente che nascano dubbi sulla certezza della matematica, perché «nelle faccende matematiche non deve esserci in linea di principio alcun dubbio» (Hilbert 1970, III, 157). Nei confronti della matematica essa non ha una funzione ampliativa ma soltanto una funzione fondativa.

5
La matematica in panni romantici

1. Un'opinione diffusa

Per quale ragione dalla fine dell'Ottocento la concezione astratta del metodo assiomatico, adottata da Hilbert, ha in gran parte rimpiazzato quella concreta, adottata da Kant?

Secondo un'opinione diffusa, ciò è avvenuto a causa di alcuni sviluppi della matematica nell'Ottocento, come la creazione delle geometrie non-euclidee, che ha mostrato che per la geometria sono disponibili sistemi di assiomi coerenti ma incompatibili tra loro, o come la creazione di una molteplicità di nuove algebre, a cominciare dall'algebra della logica, che ha mostrato che l'algebra può essere estesa al di là dei tradizionali confini della teoria delle equazioni, trattando più sistemi di oggetti mediante sistemi di assiomi coerenti ma incompatibili tra loro. Si è affermata così l'idea che la matematica è «lo studio di sistemi generali astratti» (Stone 1961, 717).

Questa opinione, però, non sembra plausibile. Infatti, i creatori delle geometrie non-euclidee non considerano le loro geometrie come sistemi generali astratti, bensì come sistemi dotati di un contenuto.

Per esempio, Lobačevskij vuol basare la geometria sui concetti di corpo (naturale), contatto tra corpi e sezione di un corpo in due parti, che egli considera primitivi e acquisibili solo tramite i sensi, perché per ciascuno di questi concetti «le parole non possono esprimere pienamente che cosa intendiamo con esso; è un concetto acquisito attraverso i sensi» (Lobačevskij 1946-51, I, 186). In questo modo Lobačevskij riesce a dimostrare tutti i postulati di Euclide tranne quello delle parallele. Ne conclude che il postulato delle parallele è ingiustificato, che l'assunzione euclidea che l'angolo di parallelismo sia $\pi/2$ è arbitraria, e che l'unico modo di eliminarne l'arbitrarietà è di costruire una nuova geometria in cui tale angolo possa variare da $\pi/2$ a 0. Secondo Lobačevskij, questa nuova geometria descrive

certe forze della natura, perché la nozione di forza è primaria e quella di spazio è derivata. Infatti, «le forze producono tutto da sé: il movimento, la velocità, il tempo, la massa e anche le distanze e gli angoli» (ivi, II, 159).

Addirittura i creatori delle geometrie non-euclidee non solo non considerano le loro geometrie come sistemi generali astratti, ma non le considerano neppure come sistemi assiomatici. Per esempio, Lobačevskij non dà alcun sistema di assiomi per la sua geometria.

Parimenti, i creatori delle nuove algebre non considerano le loro algebre come sistemi generali astratti, bensì come sistemi dotati di un contenuto.

Per esempio, Boole con la sua algebra della logica vuole studiare il processo del ragionamento rappresentando matematicamente «le leggi delle operazioni che la mente esegue in tale processo» (Boole 1996, 463 nota). A suo parere questo è possibile perché tali operazioni sono soggette a leggi che «sono matematiche quanto alla loro forma» (Boole 1958, 45). Più precisamente, Boole si propone «di indagare le leggi fondamentali di quelle operazioni della mente mediante le quali si effettua il ragionamento; di dar loro espressione nel linguaggio simbolico di un calcolo, e di istituire su questo fondamento la scienza della logica e di costruirne il metodo»; ed infine di trarne «alcune indicazioni probabili sulla natura e la costituzione della mente umana» (ivi, 1). Una tale indagine deve «fondarsi principalmente sull'osservazione» (ivi, 3). Ma, mentre nelle scienze naturali le verità generali richiedono come loro «base una estesa raccolta di osservazioni», nella scienza delle operazioni dell'intelletto umano esse richiedono un'unica osservazione, perché «sono di natura tale da imporre immediatamente l'assenso quando vengono presentate alla mente» (ivi, 4). In effetti Boole fornisce un calcolo ed afferma che le leggi delle operazioni che la mente esegue nel ragionamento sono «adeguatamente rappresentate dalle equazioni fondamentali del presente calcolo», perché esso permette di ottenere «ogni risultato a cui si può arrivare mediante il ragionamento ordinario» (Boole 1996, 463 nota).

Addirittura i creatori delle nuove algebre non solo non considerano le loro algebre come sistemi generali astratti, ma non le considerano neppure come sistemi assiomatici. Per esempio, Boole non dà alcun sistema di assiomi per la sua algebra della logica.

2. Una presunta filosofia implicita

Secondo un'altra opinione diffusa, la concezione astratta del metodo assiomatico ha in gran parte rimpiazzato la concezione concreta perché è la filosofia implicita nella matematica del Novecento, e «deve continuare inevitabilmente, rafforzata dai successi che sono già stati attribuiti ad suo merito» (Stone 1961, 717).

Anche questa opinione, però, non sembra plausibile. Per esempio, secondo la concezione astratta del metodo assiomatico la nozione di gruppo è data da assiomi scelti arbitrariamente. Ma per tale nozione esistono vari sistemi di assiomi, tra cui quello di Wiener che è essenzialmente diverso dagli altri. Secondo la concezione astratta, noi riconosciamo che il sistema di Wiener è un sistema di assiomi per i gruppi perché lo interpretiamo in qualche altro sistema di assiomi per i gruppi. Ma questa spiegazione non è plausibile perché, in realtà, noi diamo una tale interpretazione solo dopo che ci siamo resi conto che i due sistemi di assiomi descrivono la stessa nozione. La spiegazione più plausibile è, invece, che la scelta dei vari sistemi di assiomi per i gruppi sia guidata da una comprensione preassiomatica della nozione di gruppo, derivante dalla familiarità con alcuni gruppi particolari.

L'esistenza di una tale comprensione è ammessa implicitamente dallo stesso Bourbaki, uno dei più influenti sostenitori della concezione astratta. Bourbaki, infatti, introduce la nozione di gruppo basandosi su un'analisi delle proprietà comuni a tre operazioni concrete, l'addizione dei numeri reali, la moltiplicazione degli interi, modulo un dato numero primo, e la composizione delle traslazioni nello spazio euclideo tridimensionale. Secondo Bourbaki, tali proprietà comuni sono «gli assiomi delle strutture di gruppo, e derivare le loro conseguenze è fare la teoria assiomatica dei gruppi» (Bourbaki 1962, 40). Dunque Bourbaki non introduce la nozione di gruppo partendo da assiomi scelti arbitrariamente, ma da tre operazioni concrete e analizzandone le proprietà comuni. Ciò fornisce una comprensione preassiomatica della nozione di gruppo.

La teoria dei gruppi non può essere intesa come la derivazione di teoremi da assiomi scelti arbitrariamente. Al contrario, la scelta delle proprietà da dimostrare, e quindi lo sviluppo della teoria dei gruppi, sono guidati da una comprensione preassiomatica della nozione di gruppo. Questo implica che tale nozione non è data pienamente da alcun particolare sistema di assiomi. Come ogni altra nozione matematica essa ammette una serie aperta di presentazioni attraverso nuove ipotesi, ciascuna delle quali fornisce una nuova prospettiva sulla nozione di gruppo, che ne mette in luce nuovi aspetti.

3. Il romanticismo e la matematica

Per quale ragione, allora, dalla fine dell'Ottocento la concezione astratta del metodo assiomatico ha in gran parte rimpiazzato la concezione concreta? Ciò è avvenuto non per profonde ragioni scientifiche ma per un fatto culturale: il tardivo affermarsi tra i matematici del romanticismo.

Un fondamentale carattere del romanticismo è la rivendicazione di una creatività dello spirito spontanea e libera da regole, e della capacità dello

spirito di affrontare ogni problema. Questo si può vedere, ad esempio, da Novalis, che del romanticismo è stato uno degli esponenti più significativi.

Novalis esalta il «sentimento della facoltà assolutamente creatrice, della libertà produttiva, della personalità infinita» (Novalis 1968, 669). Egli individua nell'uomo «un potente presentimento di arbitrio creativo, di assenza di confini, di molteplicità infinita, di una sacra originalità» (ivi, 519). L'arbitrio creativo dell'uomo non ha altri limiti se non quelli che egli stesso si impone, dal momento che «l'uomo deve obbedire soltanto alle proprie leggi» (Novalis 1965, 501).

Secondo Novalis, l'arbitrio creativo dell'uomo si esplica tipicamente nella matematica. Un sistema matematico è «libertà e infinità, ovvero, per esprimerlo col dovuto rilievo, assenza di sistema condotta in un sistema» (ivi, 289). Il matematico crea i suoi concetti con un atto di volontà e con una determinazione che «dev'essere puramente arbitraria» (ivi, 289). Solo «nella volontà sta il fondamento della creazione» (ivi, 354). Il matematico, quando crea, è «*en état de Createur absolu*. Un cerchio, un triangolo vengono certo creati in questo modo. Non spetta loro nient'altro che quello che il creatore lascia spettare loro» (ivi, 415). Alla base della matematica vi è un atto creativo spontaneo e assolutamente libero. La matematica «è scienza autentica perché contiene nozioni costruite, prodotti di un'attività spirituale spontanea» (ivi, 473). In quanto tale essa è opera del genio. Anzi, la matematica riconduce «a regole il procedimento geniale, perché insegna ad essere geni» (ivi, 474). Essa, quindi, «genializza metodicamente» (ivi, 473).

Le creazioni del genio sono creazioni dal nulla e costituiscono un mondo poetico matematico e astratto. Infatti, «ogni reale creato dal nulla, come per esempio i numeri e i termini astratti, ha una meravigliosa affinità con le cose di un altro mondo, con serie infinite di composizioni e rappresentazioni singolari, per così dire con un mondo in sé matematico e astratto, con un mondo poetico matematico e astratto» (ivi, 440-441). Ma, sebbene gli oggetti matematici costituiscano un mondo poetico matematico e astratto, essi vengono trattati come reali dal genio, perché il «genio è la capacità di operare con oggetti immaginari come se fossero reali, e di trattarli conseguentemente» (Novalis 1965, 421).

Il carattere astratto della matematica dipende dal fatto che, contrariamente a quanto si è ritenuto tradizionalmente, la matematica «non ha nulla a che vedere con la quantità. Essa è una pura dottrina della designazione, di operazioni del pensiero ordinate in rapporti, le quali sono diventate meccaniche. La matematica dev'essere puramente arbitraria, dogmaticamente strumentale. Qualcosa di simile avviene col linguaggio astratto» (Novalis 1968, 571). Sia nella matematica che nel linguaggio astratto si ha che fare con creazioni arbitrarie. In un linguaggio astratto si introducono segni e parole in modo arbitrario. Nella matematica si introducono anche principi in modo arbitrario, e da essi poi si deducono tutte

le altre proposizioni, perché «dimostrare qualcosa a priori significa dedurre qualcosa» (ivi, 330).

Che nella matematica si introducano principi in modo arbitrario e da essi poi si deducano tutte le altre proposizioni, implica che il metodo della matematica non è il metodo analitico bensì il metodo sintetico, ossia assiomatico. La matematica è opera del genio, e il «genio è il principio sintetizzante» (ivi, 168). È vero che «il metodo sintetico (di cominciare dai dati) è un metodo freddo, combinante, cristallizzante, fissante, successivo. Il metodo analitico invece è caldo, risolvente, liquefacente» (ivi, 459). Nondimeno, il matematico «segue un metodo sintetico» (ivi, 330). Soltanto esso, infatti, permette di costruire un sistema in modo assolutamente libero, prescindendo dal mondo reale ed edificando un «puro sistema a priori, sorto senza la condizione di uno stimolo esterno» (Novalis 1965, 562). Soltanto esso «inizia dalla libertà e termina nella libertà» (ivi, 273).

Il metodo sintetico permette al matematico di affrontare ogni problema e di avvicinarsi «a quella perfezione della volontà che si esprime dicendo: egli può ciò che vuole» (Novalis 1968, 356). Tale perfezione è l'espressione «di una onnicapacità dell'umanità interiore» (ivi, 519). La libertà che il metodo sintetico offre al matematico è il fondamento di tale onnicapacità.

4. L'influenza del romanticismo

L'influenza del romanticismo sulla matematica appare evidente dall'affermazione, ricorrente tra i matematici alla fine dell'Ottocento, che i concetti e le proposizioni primitive della matematica sono creazioni assolutamente libere dello spirito umano, soggette all'unico vincolo della coerenza.

Per esempio, Cantor afferma che «la matematica è completamente libera nel suo sviluppo, e i suoi concetti sono legati tra loro solo dalla necessità di non essere in contraddizione e di essere coordinati ai concetti precedentemente introdotti mediante precise definizioni» (Cantor 1962, 182).

Dedekind afferma che i concetti matematici sono qualcosa di nuovo «che lo spirito crea. Noi siamo di stirpe divina e certamente abbiamo la facoltà di creare, non soltanto cose materiali (ferrovie, telegrafi) ma, tipicamente, cose mentali» (Dedekind 1930-32, III, 489).

Pieri afferma che la matematica è una scienza «in tutto speculativa e astratta, i cui soggetti sono mere creazioni del nostro spirito, e semplici atti della nostra volontà i postulati», onde sono «arbitrari gli uni e gli altri» (Pieri 1980, 102).

Poincaré afferma che, mentre lo storico o il fisico partono da fatti che non sono stati creati da loro, i fatti di cui si occupa il matematico «è lui, stavo per dire è il suo capriccio, ad averli creati», così come «è lui a costruire,

a partire da tutti i pezzi, una nuova combinazione accostandone gli elementi; in generale non è la natura a prepararglielа già pronta» (Poincaré 1999, 26).

Vailati afferma che, una teoria matematica è «tanto più perfetta, e si avvicina tanto più al suo ideale, quanto maggiormente diventa suscettibile di essere sviluppata indipendentemente da ogni riferimento agli oggetti o alle relazioni di cui essa tratta, e alle quali essa è capace di venire applicata; cioè, chi la costruisce è in grado di riguardarla come una pura creazione del suo proprio arbitrio»; e questo carattere della matematica rende manifesta «l'intima e fondamentale affinità che sussiste tra essa e l'attività creatrice dell'artista» (Vailati 1987, I, 11-12).

Questa comunanza di accenti tra personalità pur così differenti, mostra quanto sia stata forte l'influenza del romanticismo sui matematici alla fine dell'Ottocento. Tale influenza li indusse a proporre l'immagine del matematico che crea come un poeta, in sostituzione di quella, più tradizionale, del matematico come uno sgobbone metodico un po' tardo di mente.

5. Il romanticismo e la concezione astratta

La rivendicazione romantica di una creatività dello spirito umano assolutamente spontanea e libera da regole e della sua capacità di affrontare ogni problema, trova naturale espressione nella concezione astratta.

Questo appare chiaro da Hilbert, secondo cui nella matematica «lo spirito umano, incoraggiato dalla riuscita delle soluzioni, diviene consapevole della propria autonomia; trae da se stesso, spesso senza riconoscibili stimoli esterni, nuovi e fecondi problemi, effettuando soltanto nel modo più felice combinazioni logiche, generalizzazioni e particolarizzazioni, separazioni e unioni di concetti, ed emerge in primo piano come il vero e proprio soggetto interrogante» (Hilbert 1970, III, 293). Lo spirito umano fa questo in modo assolutamente libero, perciò si può dire che «l'essenza della matematica sta nella sua libertà» (Hilbert 1929, 9).

Tale libertà, secondo Hilbert, trova piena realizzazione nella concezione astratta, che, non ponendo vincoli nella scelta del sistema dei termini primitivi e delle proposizioni primitive, «garantisce all'indagine la più piena libertà di movimento» (Hilbert 1970, III, 161).

In ciò essa differisce dalla concezione concreta, che nega tale libertà. Euclide, in quanto pretende che la scelta dei termini primitivi e delle proposizioni primitive della geometria sia determinata da una particolare interpretazione, cioè lo spazio fisico, non lascia al matematico alcuna libertà di scelta. Egli assume senza alcuna prova che esistano connessioni molto strette tra i termini primitivi e le proposizioni primitive della geometria, da un lato, e lo spazio fisico dall'altro, ma così facendo mostra «di credere a certe connessioni come a dei dogmi» (*ibid.*).

La concezione astratta, invece, «toglie via questa ingenuità, lasciando però i vantaggi del credere» (*ibid.*). Abbandonando l'assunzione dogmatica di Euclide, essa consente al matematico di poter disporre liberamente di stabilire i termini primitivi e di «poter disporre liberamente anche di stabilire le note caratteristiche» (Hilbert 1976, 66), ossia le proposizioni primitive o assiomi. Infatti, in base alla concezione astratta, non appena il matematico ha stabilito un termine primitivo, questo esiste ed è fissato, e non appena ha «stabilito un assioma, questo esiste ed è vero» (*ibid.*).

6. *Nescimus sed sciemus*

Grazie alla mancanza di vincoli che la concezione astratta assicura, secondo Hilbert, tale concezione permette allo spirito umano di dispiegare «la potenza creatrice del pensiero puro» (Hilbert 1970, III, 293). Essa «ci procura il sublime sentimento della convinzione che almeno per l'intelletto umano non sono tracciati dei limiti» (Hilbert 1929, 9). Questa convinzione ci rende fiduciosi che, mediante il metodo assiomatico, noi saremo in grado di dare una rigorosa sistemazione ad ogni problema matematico, «o riuscendo a dare la risposta alla questione posta oppure mostrando l'impossibilità di una sua soluzione e quindi la necessità dell'insuccesso di ogni tentativo» (Hilbert 1970, III, 297).

Quando ci vengono proposti problemi matematici ancora irrisolti, «per quanto inaccessibili ci appaiano questi problemi e per quanto siamo completamente privi di prospettive davanti ad essi, noi abbiamo comunque la sicura convinzione che la loro soluzione deve riuscire mediante un numero finito di inferenze puramente logiche» (*ibid.*). Questo «è per noi un potente stimolo durante il lavoro. Dentro di noi sentiamo continuamente l'appello: ecco il problema, cerca la soluzione. La puoi trovare mediante il puro pensiero» (ivi, III, 298). Questa convinzione non è «una peculiarità propria del pensiero matematico», ma è piuttosto «una legge generale che inerisce all'intima natura del nostro intelletto, quella per cui il nostro intelletto è capace di dare una risposta a tutte le questioni a lui poste» (ivi, III, 297).

È vero che talvolta noi cerchiamo la soluzione di un problema matematico «sotto ipotesi insufficienti ovvero in una direzione sbagliata, e quindi non raggiungiamo la meta. Sorge allora il compito di dimostrare l'impossibilità della soluzione del problema sotto le ipotesi date e nella direzione voluta» (*ibid.*). È quanto è accaduto, ad esempio, col problema della quadratura del cerchio o con quello della risoluzione delle equazioni di quinto grado per radicali. Ma dimostrare l'impossibilità della soluzione di un problema sotto ipotesi date è anch'essa una soluzione del problema, «sebbene in un senso diverso da quello inteso originariamente» (*ibid.*). Una dimostrazione di impossibilità ci mostra che le ipotesi considerate sono

insufficienti per ottenere una soluzione del problema e ci spinge a cercare nuove ipotesi.

Molti oggi, «atteggiandosi a filosofi e con tono di superiorità, profetizzano il tramonto della cultura e si compiacciono dell'ignorabimus» (ivi, III, 387). Essi affermano che esistono limiti insormontabili alla conoscenza matematica e alla conoscenza della natura. Addirittura du Bois-Reymond sostiene che lo scienziato non può limitarsi a dire ignoramus ma «deve, una volta per sempre, decidersi per il verdetto molto più duro da pronunciare: ignorabimus» (Du Bois-Reymond 1967, 51).

Ma «per i matematici non esiste l'ignorabimus», e «non esiste neppure per la conoscenza della natura. Una volta il filosofo Comte, per dare un esempio di problema insolubile, affermò che la scienza non sarebbe mai riuscita a conoscere a fondo il segreto della composizione chimica dei corpi celesti. Alcuni anni dopo questo problema fu risolto mediante l'analisi spettrale di Kirchhoff e Bunsen, e oggi possiamo dire che utilizziamo le stelle più lontane come importantissimi laboratori fisici e chimici quali non potremmo trovare sulla terra. Il vero motivo per cui Comte non riuscì a trovare un problema insolubile» è «che non esiste alcun problema insolubile» (Hilbert 1970, III, 387).

Se «Cantor ha detto: l'essenza della matematica sta nella sua libertà», a ciò si deve aggiungere «per gli scettici e i pusillanimi: nella matematica non esiste alcun ignorabimus; al contrario, noi possiamo sempre dare risposte alle questioni sensate» (Hilbert 1929, 9). Perciò «al posto dello stolto ignorabimus, la nostra parola d'ordine è invece: noi dobbiamo sapere, noi sapremo» (Hilbert 1970, III, 387).

La presa di posizione di Hilbert contro l'ignorabimus corrispondeva ad una sua convinzione così profonda che egli arrivò a formujlare un «assioma della solubilità di ogni problema» (ivi, III, 297). Per sottolineare l'importanza per lui di tale convinzione, il motto 'noi dobbiamo sapere, noi sapremo' è stato scolpito sulla sua tomba. Proclamando che per l'intelletto umano non vi sono limiti nella conoscenza matematica, tale motto costituisce una perfetta, per quanto tardiva, incarnazione dello spirito romantico.

6
I programmi della coerenza e della conservazione

1. I paradossi

Abbiamo detto che, per Hilbert, il ruolo della filosofia nei confronti della matematica è quello di giustificare la matematica attraverso un'indagine del suo fondamento.

L'esigenza di una tale giustificazione era già nata col calcolo infinitesimale di Newton e Leibniz, che aveva dato luogo a paradossi. Per eliminarli Weierstrass, Dedekind e Cantor elaborarono una fondazione del calcolo infinitesimale, che però diede luogo anch'essa a «contraddizioni, dapprima sporadiche e poi gradualmente sempre più acute e serie, i paradossi della teoria degli insiemi. In particolare, una contraddizione scoperta da Zermelo e Russell ebbe un effetto addirittura catastrofico quando divenne nota nel mondo matematico» (Hilbert 1926, 169). A causa di essa la matematica è stata «colpita per due decenni come da un incubo» (Hilbert 1929, 2). Addirittura Brouwer e Weyl pretendono che, come via di uscita da tale contraddizione si debba rinunciare a parti sostanziali della matematica. Ma Hilbert vi si oppone, perché «seguendo questi riformatori corriamo il pericolo di perdere una gran parte dei nostri più prezioni tesori» (Hilbert 1970, III, 159).

Nondimeno Hilbert ammette che la situazione creata dalla contraddizione scoperta da Zermelo e Russell «non può essere sopportata a lungo andare. Si pensi: nella matematica, in questo modello di sicurezza e di verità, le concettualizzazioni e le inferenze che tutti imparano, insegnano e adoperano portano ad assurdità. E dove si può trovare altrove sicurezza e verità se persino il pensiero matematico viene meno?» (Hilbert 1926, 170). Che «ne sarebbe della verità della nostra conoscenza, che ne sarebbe dell'esistenza e del progresso della scienza, se nemmeno nella matematica ci fosse una verità sicura?» (Hilbert 1929, 9). Perciò, secondo Hilbert, dovunque «ci si presenti anche solo una minima speranza, noi vogliamo esaminare

accuratamente tutte le concettualizzazioni e i ragionamenti fecondi, consolidarli e renderli passibili di impiego» (Hilbert 1926, 170).

2. Matematica finitaria e matematica infinitaria

A tale scopo Hilbert distingue, nell'ambito della matematica, una parte propria, detta matematica finitaria, che si basa sull'intuizione sensibile pura. In essa si considerano solo «oggetti concreti extra-logici che esistono intuitivamente come esperienza immediata, prima di ogni pensiero» (ivi, 171). E si usano solo metodi che si mantengono entro i limiti «dell'eseguibilità in linea di principio dei processi» (Hilbert-Bernays 1968-70, I, 32).

La matematica finitaria è una parte propria della matematica nel suo complesso, che può essere detta perciò matematica infinitaria. La ragione per cui la matematica finitaria è una parte propria della matematica infinitaria è che in quest'ultima si considerano, oltre ad oggetti concreti che esistono intuitivamente, anche oggetti astratti, cioè gli insiemi infiniti, e si usano, oltre a metodi che si mantengono entro i limiti dell'eseguibilità in linea di principio dei processi, anche metodi astratti, cioè «gli assiomi infinitari» (Hilbert 1970, III, 187).

La matematica finitaria non solo è una parte propria della matematica infinitaria, ma è anche molto ristretta, tanto che già parti rilevanti dell'aritmetica, o teoria dei numeri, vanno al di là di essa. Infatti, «l'usuale trattazione dell'aritmetica non corrisponde affatto alla posizione finitaria, ma si basa in modo sostanziale su principi di ragionamento aggiuntivi» (Hilbert-Bernays 1968-70, I, 42). Perciò la matematica finitaria è addirittura una parte propria dell'aritmetica, e quindi «i metodi finitari sono già compresi nell'aritmetica usuale» (*ibid.*)

Secondo Hilbert, solo le proposizioni della matematica finitaria hanno un contenuto, mentre quelle della matematica infinitaria «in sé non significano niente» (Hilbert 1926, 175). Esse sono soltanto «un modo di dire» (ivi, 162). Questo dipende dal fatto che, mentre le proposizioni della matematica finitaria sono relative ad oggetti concreti che esistono intuitivamente, e quindi esistono in un senso reale, quelle della matematica infinitaria sono relative ad oggetti astratti, che non esistono in un senso reale ma sono soltanto cose ideali o finzioni ben fondate.

In quanto le proposizioni della matematica finitaria sono relative ad oggetti che esistono in un senso reale, esse possono essere dette proposizioni reali. In quanto, invece, le proposizioni della matematica infinitaria sono relative ad oggetti che sono soltanto cose ideali, esse possono essere dette proposizioni ideali.

Secondo Hilbert, mediante l'uso delle proposizioni ideali non si dimostrano proposizioni reali che non siano dimostrabili già senza tale uso. Nondimeno le proposizioni ideali sono utili, perché permettono di abbreviare

le dimostrazioni delle proposizioni reali e quindi di «semplificare e concludere la teoria» (Hilbert 1970, III, 187). Esse svolgono un ruolo simile a quello degli immaginari, che sono stati aggiunti ai numeri reali «per poter mantenere nella forma più semplice le leggi dell'algebra (per esempio, quelle relative all'esistenza e al numero delle radici di un'equazione)» (Hilbert 1926, 174).

Lo statuto delle proposizioni ideali può anche essere paragonato a quello attribuito da Kant ai concetti trascendentali della ragione, che sono utili perché mediante essi «l'intelletto non può, è vero, conoscere alcun oggetto oltre quelli conoscibili con i suoi concetti, ma nella conoscenza di questi è indirizzato meglio e più a fondo» (Kant 1900- , III, 255). Parimenti, le proposizioni ideali sono utili perché mediante esse l'intelletto non può, è vero, dimostrare alcuna proposizione reale oltre quelle dimostrabili senza di esse, ma nella dimostrazione di tali proposizioni è indirizzato meglio e più a fondo.

3. Il programma della coerenza

La ragione per cui Hilbert distingue la matematica finitaria nell'ambito della matematica infinitaria è che egli la ritiene assolutamente certa in quanto basata sull'intuizione sensibile pura.

I dubbi possono nascere solo riguardo alla matematica infinitaria, che ammette operazioni astratte su estensioni di concetti e contenuti di concetti generali. In effetti i paradossi della teoria degli insiemi mostrano che è proprio «l'operare astratto con estensioni di concetti e contenuti di concetti generali» che «è risultato difettoso e insicuro» (Hilbert 1970, III, 162).

Nondimeno la matematica infinitaria, e specificamente la teoria degli insiemi, è essenziale per la fondazione del calcolo infinitesimale di Weierstrass, Dedekind e Cantor. Perciò «nessuno deve poterci mai scacciare dal paradiso che Cantor ha creato per noi» (Hilbert 1926, 170). Per evitare che questo accada occorre impedire definitivamente che nascano dubbi sulla matematica infinitaria, ristabilendo quella sicurezza di ragionamento che è propria della matematica finitaria. Si deve, cioè, dimostrare in modo inoppugnabile che nella matematica infinitaria non possono nascere contraddizioni.

A tale scopo Hilbert formula un programma, detto programma della coerenza, mediante il quale, basandosi sul carattere assolutamente certo della matematica finitaria, vuole impedire definitivamente che nascano dubbi sulla matematica infinitaria, «proteggendola sia dal terrore di divieti non necessari», come quelli che vogliono imporre Brouwer e Weyl, «sia dal travaglio dei paradossi» (Hilbert 1970, III, 174).

Il *programma della coerenza* di Hilbert consta dei seguenti passi:

1) rappresentare la matematica infinitaria mediante un sistema formale *S*;
2) dimostrare la coerenza di *S* nella matematica finitaria.

Col passo 1) del programma della coerenza, tutto ciò che costituisce la matematica nel senso corrente, ossia la matematica infinitaria, viene «rigorosamente formalizzato, cosicché la matematica propriamente detta, o matematica in senso stretto, diventa un patrimonio di formule» (Hilbert 1931a, 489). Questo comprende, «in primo luogo, le formule a cui corrispondono comunicazioni contenutistiche di proposizioni finitarie», cioè le formule che esprimono le proposizioni reali, e, «in secondo luogo, altre formule che non significano niente e che sono i costrutti ideali della nostra teoria» (Hilbert 1926, 175-176).

La necessità della formalizzazione deriva dal fatto che le proposizioni ideali non hanno un contenuto ma sono solo un modo di dire. Poiché «non significano niente, ad esse non si possono applicare contenutisticamente le operazioni logiche e anche le stesse dimostrazioni matematiche. È dunque necessario formalizzare le operazioni logiche e anche le stesse dimostrazioni matematiche; ciò richiede che le relazioni logiche siano tradotte in formule» (ivi, 176).

La formalizzazione ci libera dalla necessità di assegnare un'interpretazione alle proposizioni ideali. Infatti «non è per nulla ragionevole la richiesta generale che ogni singola» proposizione che occorre in una dimostrazione «sia interpretabile di per se stessa; corrisponde invece alla natura di una teoria il fatto che noi non dobbiamo ricorrere all'intuizione o al significato nel suo sviluppo» (Hilbert 1928, 79). La formalizzazione ci evita di dover ricorrere all'intuizione e al significato. Con essa la matematica infinitaria si trasforma in qualcosa che ha lo stesso carattere degli oggetti della matematica finitaria. Infatti, le formule che esprimono le proposizioni ideali sono stringhe di segni-base di un linguaggio segnico, quindi sono oggetti concreti che esistono intuitivamente. Parimenti, le dimostrazioni formali contenenti formule che esprimono le proposizioni ideali sono successioni finite di stringhe di segni-base di un linguaggio segnico, quindi sono oggetti concreti che esistono intuitivamente.

Per formalizzare la matematica infinitaria si possono usare non solo sistemi formali del primo ordine, cioè basati sulla logica del primo ordine, ma anche sistemi formali del secondo ordine, cioè basati sulla logica del secondo ordine. Infatti, la formalizzazione della matematica infinitaria richiede quantificazioni applicate «a specie superiori di variabili, e anzitutto a quella delle funzioni di variabile reale» (Hilbert 1929, 6).

Perché il sistema formale *S* risultante dalla formalizzazione rappresenti la matematica infinitaria, secondo Hilbert, esso deve soddisfare le seguenti condizioni.

a) *S* dev'essere coerente, completo e decidibile. Che *S* debba essere coerente significa che non deve esistere alcun enunciato *A* di *S* tale che *A* e $\neg A$ sono entrambi dimostrabili in *S*. Che *S* debba essere completo significa che, per ogni enunciato *A* di *S*, o *A* oppure $\neg A$ dev'essere dimostrabile in *S*. Che *S* debba essere decidibile significa che deve esistere un metodo meccanico per stabilire, per ogni formula *A* di *S*, se *A* è dimostrabile o non è dimostrabile in *S*. Ciò segue dalle condizioni poste da Hilbert sui sistemi di assiomi.

b) *S* dev'essere espressivo. Questo significa che *S* deve permettere di esprimere tutti i concetti della matematica infinitaria. Solo così si può dire che con la formalizzazione tutti «i concetti matematici vengono inclusi nell'edificio della matematica come componenti formali» (Hilbert 1970, III, 165).

c) *S* dev'essere completo rispetto alla validità logica. Questo significa che le regole logiche di *S* devono permettere di dimostrare tutti gli enunciati logicamente validi. Infatti, «nelle asserzioni che abbiamo appena fatto sulla completezza» di *S*, «è inclusa contemporaneamente l'asserzione che le regole formalizzate del ragionamento logico sono comunque sufficienti» per dimostrare tutte «le proposizioni logiche universalmente valide» (Hilbert 1929, 7-8). Se non lo fossero, certe leggi logiche che si usano nella matematica infinitaria non potrebbero essere usate nelle dimostrazioni di *S*.

Col passo 2) del programma della coerenza, la coerenza del sistema formale *S* mediante il quale si rappresenta la matematica infinitaria viene dimostrata con i metodi assolutamente certi della matematica finitaria.

Che la coerenza di *S* debba essere dimostrata deriva dal fatto che l'aggiunta di assiomi infinitari alla matematica finitaria potrebbe far temere che ne possa derivare qualche contraddizione. Perciò diventa «una questione scottante dimostrare la coerenza degli assiomi» (ivi, 3).

Che la coerenza di *S* debba essere dimostrata nella matematica finitaria deriva dal fatto che «l'operare con l'infinito può essere reso sicuro soltanto mediante il finito» (Hilbert 1926, 190). Infatti, solo la matematica finitaria è assolutamente certa.

Dimostrando la coerenza di *S* nella matematica finitaria abbiamo la certezza teorica che gli assiomi infinitari «non possono mai portare ad un risultato dimostrabilmente falso» (Hilbert-Bernays 1968-70, I, 44). Possiamo, perciò, asserire giustificatamente che «gli enunciati matematici sono realmente verità incontestabili e definitive» (Hilbert 1970, III, 162). E che «ciò che abbiamo già sperimentato due volte, una volta quando si trattava dei paradossi del calcolo infinitesimale e un'altra volta con i paradossi della teoria degli insiemi, non potrà verificarsi una terza volta né mai più» (Hilbert 1926, 179).

Naturalmente, perché la coerenza di *S* possa essere dimostrata nella matematica finitaria, occorre che la proposizione che la esprime sia una proposizione reale. Che lo sia lo si vede dal fatto che tale proposizione è data da:

(1) per ogni *d*, *d* non è una dimostrazione di $0 \neq 0$ in *S*.

Poiché le dimostrazioni in *S* sono oggetti concreti che esistono intuitivamente, la (1) è una proposizione reale.

Sebbene la (1) faccia riferimento soltanto alla proposizione $0 \neq 0$, essa esprime la coerenza di *S*. Infatti, la proposizione $0 \neq 0$ equivale in *S* ad $A \wedge \neg A$, per una formula qualsiasi *A*. Per vederlo basta si osservare che, se $0 \neq 0$, allora, poiché $0 = 0$ è dimostrabile in *S* e da una contraddizione si può dedurre qualsiasi cosa, si ha $A \wedge \neg A$. Viceversa, se $A \wedge \neg A$, allora, poiché da una contraddizione si può dedurre qualsiasi cosa, si ha $0 \neq 0$. Perciò, «per la dimostrazione della coerenza, dobbiamo soltanto dimostrare che, in una dimostrazione dai nostri assiomi, non può risultare come formula finale $0 \neq 0$, cioè che $0 \neq 0$ non è una formula dimostrabile» (Hilbert 1928, 74).

4. Il programma della conservazione

Abbiamo detto che, secondo Hilbert, mediante l'uso delle proposizioni ideali non si dimostrano proposizioni reali che non siano dimostrabili già senza tale uso. Per stabilirlo occorre far vedere che ogni proposizione ideale «può essere eliminata da una dimostrazione» di una proposizione reale, «nel senso che le figure composte con essa possono essere rimpiazzate da segni numerici in modo tale che le formule che risultano per sostituzione» dalle proposizioni ideali «si trasformano con questi rimpiazzamenti in formule 'vere'» (Hilbert 1928, 82).

A tale scopo Hilbert formula un programma, detto programma della conservazione, mediante il quale vuol mostrare che «i modi inferenziali basati sull'infinito» possono essere «sostituiti con processi finiti che danno esattamente gli stessi risultati» (Hilbert 1926, 162).

Il *programma della conservazione* di Hilbert consta dei seguenti passi:

1) rappresentare la matematica infinitaria mediante un sistema formale *S*;
2) dimostrare la coerenza esterna di *S* nella matematica finitaria, dove che *S* sia esternamente coerente significa che, per ogni enunciato *A* esprimente una proposizione reale, se *A* è dimostrabile in *S*, allora *A* è vero.

Col passo 1) del programma della conservazione, che coincide col passo corrispondente del programma della coerenza, la matematica infinitaria viene rigorosamente formalizzata.

Col passo 2) del programma della conservazione, la coerenza esterna del sistema formale *S* mediante il quale si rappresenta la matematica infinitaria viene dimostrata con i metodi assolutamente certi della matematica finitaria.

Che la coerenza esterna di *S* debba essere dimostrata deriva dal fatto l'aggiunta di assiomi infinitari alla matematica finitaria potrebbe far temere che, con l'uso di proposizioni ideali, si possano dimostrare proposizioni reali false non dimostrabili senza tale uso.

Che la coerenza esterna di *S* debba essere dimostrata nella matematica finitaria deriva dal fatto che solo così si può stabilire che, se un enunciato esprimente una proposizione reale è dimostrabile in *S*, allora esso è vero nella matematica finitaria.

Dimostrando la coerenza esterna di *S* nella matematica finitaria si ha la certezza teorica che «l'estensione mediante aggiunta di elementi ideali è ammissibile» in quanto è conservativa, cioè in quanto «nel vecchio dominio sono sempre valide le relazioni che risultano per i vecchi oggetti eliminando gli oggetti ideali» (Hilbert 1928, 73).

Naturalmente, perché la coerenza esterna di *S* possa essere dimostrata nella matematica finitaria, occorre che la proposizione che la esprime sia una proposizione reale. Che lo sia lo si vede dal fatto che tale proposizione è data da:

(2) per ogni *d* e per ogni enunciato *A* esprimente una proposizione reale, se *d* è una dimostrazione di *A* in *S*, allora *A* è vero.

Poiché le dimostrazioni in *S* sono oggetti concreti che esistono intuitivamente, la (2) è una proposizione reale.

5. Equivalenza dei due programmi

Sebbene il programma della coerenza e il programma della conservazione abbiano formulazioni differenti, in realtà essi sono equivalenti. Ciò può essere visto nel modo seguente.

Mostriamo anzitutto che, se il programma della coerenza è realizzabile, tale è anche il programma della conservazione.

Infatti, supponiamo che i passi 1) e 2) del programma della coerenza siano realizzabili. Allora tale è banalmente il passo 1) del programma della

conservazione. Facciamo vedere che anche il passo 2) del programma della conservazione è realizzabile.

Dobbiamo mostrare che la proposizione (2) è dimostrabile nella matematica finitaria. Sia A un enunciato esprimente una proposizione reale e sia d una dimostrazione di A in S. Dobbiamo far vedere che A è vero.

Poiché le dimostrazioni in S sono oggetti concreti che esistono intuitivamente, nella matematica finitaria si può riconoscere che:

d è una dimostrazione di A in S.

Supponiamo che A non sia vero. Allora $\neg A$ è vero. Perciò, per il passo 1) del programma della conservazione, deve esistere una dimostrazione e di $\neg A$ in S. Poiché le dimostrazioni in S sono oggetti concreti che esistono intuitivamente, nella matematica finitaria si può riconoscere che:

e è una dimostrazione di $\neg A$ in S.

Da d, e e da una dimostrazione f in S del fatto che $0 \neq 0$ e $A \wedge \neg A$ sono equivalenti, si ottiene una dimostrazione g di $0 \neq 0$ in S. Poiché le dimostrazioni in S sono oggetti concreti che esistono intuitivamente, nella matematica finitaria si può riconoscere che:

(3) g è una dimostrazione di $0 \neq 0$ in S.

Ma, in base all'ipotesi che il passo 2) del programma della coerenza sia realizzabile, nella matematica finitaria si può riconoscere che:

(4) g non è una dimostrazione di $0 \neq 0$ in S.

Da (3) e (4) si ottiene una contraddizione. Se ne conclude perciò che A dev'essere vero. Ciò stabilisce il risultato.

Viceversa, mostriamo che, se il programma della conservazione è realizzabile, tale è anche il programma della coerenza.

Infatti, supponiamo che i passi 1) e 2) del programma della conservazione siano realizzabili. Allora tale è banalmente il passo 1) del programma della coerenza. Facciamo vedere che anche il passo 2) del programma della coerenza è realizzabile.

Dobbiamo mostrare che la proposizione (1) è dimostrabile nella matematica finitaria. Supponiamo che d sia una dimostrazione di $0 \neq 0$ in S. Poiché l'enunciato $0 \neq 0$ esprime una proposizione reale, dall'ipotesi che il passo 2) del programma della conservazione sia realizzabile segue che $0 \neq 0$ è vero. Ma $0 \neq 0$ è falso. Contraddizione. Se ne conclude che, per ogni d, d non è una dimostrazione di $0 \neq 0$ in S. Ciò stabilisce il risultato.

6. Aspettative sulla realizzabilità dei programmi

Hilbert era convinto che i suoi programmi fossero realizzabili. Nel 1918 egli ancora si esprimeva cautamente sul programma della coerenza: «La realizzazione di questo programma è certamente un problema ancora irrisolto oggi» (Hilbert 1970, III, 155). Ma nel 1928 dichiarava: «Credo di poter raggiungere pienamente questo obiettivo, anche se per conseguirlo pienamente sarà necessario ancora molto lavoro» (Hilbert 1928, 65). Nel 1931 addirittura affermava: «Credo di aver raggiunto completamente ciò che volevo e avevo promesso: il problema dei fondamenti della matematica in quanto tale è stato con ciò definitivamente eliminato» (Hilbert 1931a, 494).

Ma il 7 settembre 1930, nel corso di un convegno tenuto, per un'ironia storica, a Königsberg, città natale di Hilbert (così come di Kant), Gödel aveva già annunciato pubblicamente quel suo primo teorema di incompletezza che, insieme ad altri risultati limitativi, avrebbe segnato il definitivo crollo dei programmi di Hilbert. Egli aveva affermato, infatti, che «si possono dare (sotto l'ipotesi della coerenza della matematica classica) persino esempi di proposizioni (e in effetti di proposizioni del tipo di Goldbach o Fermat) che in realtà sono contenutisticamente vere, ma non sono dimostrabili nel sistema formale della matematica classica» (Gödel 1986-, I, 202).

Hilbert si rifiutò di riconoscere la portata distruttiva dei risultati di Gödel, affermando che «si è dimostrata errata l'opinione temporaneamente accolta che da certi nuovi risultati di Gödel segua l'impraticabilità della mia teoria» (Hilbert-Bernays 1968-70, I, *vii*). Egli arrivò addirittura a sostenere che il primo teorema di incompletezza di Gödel era perfettamente conciliabile con la sua «concezione, secondo cui la posizione contenutistica che sta alla base della costruzione del sistema dell'analisi e della teoria degli insiemi è un'idealizzazione estrapolante» (ivi, II, 289). Ma questo non avrebbe evitato il crollo dei suoi programmi.

7
La matematica come sistema chiuso

1. L'assunzione del mondo chiuso

L'assunzione della concezione fondazionalista che il metodo della matematica è il metodo assiomatico può anche essere riformulata sotto forma della seguente assunzione, che chiameremo assunzione del mondo chiuso: le teorie matematiche sono sistemi chiusi.

Per sistema chiuso si intende qui un sistema basato sul metodo assiomatico. L'uso di tale terminologia si basa su un'analogia con la fisica. Come in questa per sistema chiuso si intende un sistema che non può scambiare né energia né materia con altri sistemi (per esempio, un termos ideale che non perda né calore né vapore acqueo), così qui per sistema chiuso si intende un sistema basato sul metodo assiomatico, perché un tale sistema non può scambiare informazione con altri sistemi.

In effetti, in un sistema basato sul metodo assiomatico, tutta l'informazione è contenuta implicitamente negli assiomi. Questi sono dati dall'inizio, una volta per sempre, e non possono essere cambiati. Lo sviluppo del sistema consiste nel rendere esplicita l'informazione contenuta implicitamente negli assiomi, ottenendo da essi teoremi mediante inferenze deduttive. I teoremi non contengono nulla di essenzialmente nuovo rispetto agli assiomi, si limitano ad esplicitare ciò che è già contenuto implicitamente in essi.

L'assunzione del mondo chiuso è del tutto naturale dal punto di vista della concezione fondazionalista, perché i sistemi assiomatici servono per giustificare conoscenze già acquisite. Essi mostrano, infatti, che alla base di tali conoscenze vi sono poche, ben individuate proposizioni, gli assiomi, da cui si possono ottenere, in modo puramente logico, tutte queste conoscenze. Naturalmente, poiché in tali sistemi tutte le conoscenze sono contenute implicitamente negli assiomi, l'assunzione del mondo chiuso riduce il

problema di giustificare conoscenze già acquisite a quello di giustificare gli assiomi.

2. La formulazione dell'assunzione del mondo chiuso

L'assunzione del mondo chiuso viene formulata da Kant e Hilbert nel modo seguente.

Per Kant le teorie matematiche sono sistemi chiusi perché si basano su assiomi che sono dati dall'inizio, una volta per sempre, e contengono implicitamente tutti i teoremi. Gli assiomi sono come «un germe in cui tutte le parti si celano, ancora inviluppate e a mala pena riconoscibili all'osservazione microscopica» (Kant 1900- , III, 539). L'attività del matematico consiste nel dischiudere quel germe, ossia nel rendere espliciti i teoremi che essi contengono implicitamente. Ciò non richiede l'uso di alcuna informazione non contenuta già negli assiomi. Quindi le teorie matematiche si sviluppano soltanto per «crescita dall'interno (*per intussusceptionem*), e non dall'esterno (*per appositionem*), proprio come un corpo animale il cui accrescimento non comporta alcuna aggiunta di membra, limitandosi a rendere ogni membro più forte e più idoneo ai propri fini, senza mutamento delle proporzioni» (*ibid.*).

Può accadere, però, che dagli assiomi venga derivata qualche falsità, in particolare qualche contraddizione. In tal caso lo sviluppo normale della teoria, che consiste nel derivare conseguenze dagli assiomi, si interrompe e si produce una discontinuità: gli assiomi devono essere abbandonati e sostituiti con altri. Infatti, «se da una proposizione si può trarre anche una sola conseguenza falsa, tale proposizione sarà falsa» (ivi, III, 514). Lo stesso accade quando gli assiomi non permettono di derivare qualche verità. Infatti, «tutte le conseguenze devono derivare da quell'unica base assunta. Se non è così, allora si ricorre all'aiuto di una nuova ipotesi» (ivi, XXIV, 746). Anche in questo caso, dunque, gli assiomi devono essere abbandonati e sostituiti con altri.

Parimenti, per Hilbert le teoria matematiche sono sistemi chiusi perché si basano su un insieme «chiuso di assiomi» (Hilbert 1900, 184). Quando esaminiamo approfonditamente una teoria matematica, riconosciamo che alla base della sua costruzione vi sono poche, ben individuate proposizioni, e che queste sole bastano per costruire da esse, secondo principi logici, l'intera teoria. Perciò una teoria matematica è un sistema chiuso, dove le proposizioni che stanno alla base della costruzione svolgono il ruolo di assiomi.

Più specificamente, le teorie matematiche possono essere identificate con quel particolare tipo di sistemi chiusi che sono i sistemi formali. In tal modo non si perde nulla perché, nei sistemi formali con cui si rappresentano le teorie matematiche nel senso ordinario, «gli assiomi e le proposizioni dimostrabili, ossia le formule che si ottengono con tale interscambio, sono le

copie dei pensieri che costituiscono la matematica finora usuale» (Hilbert 1928, 66). Anzi ci si guadagna, perché in un sistema formale tutto «si svolge secondo regole determinate, nelle quali si esprime la tecnica del nostro pensiero» (ivi, 79). Tali regole «formano un sistema chiuso, che si può scoprire e formulare in modo definitivo» (*ibid*.). I «modi di inferenza del sistema sono orientati secondo l'immagine di una realtà chiusa e totalmente determinata, e danno espressione formale a questa immagine» (Hilbert-Bernays 1968-70, II, 289).

Lo sviluppo della matematica consiste nella costruzione di una successione di sistemi formali, ciascuno dotato di «un sistema di assiomi semplice e completo» (Hilbert 1970, III, 295). Più specificamente, lo sviluppo normale della matematica consiste nel derivare conseguenze dagli assiomi in un sistema formale dato. Gli assiomi, che costituiscono «le premesse fondamentali, vengono posti come tali dall'inizio», quindi sono dati una volta per sempre, mentre tutto il resto «viene derivato logicamente da essi per mezzo di definizioni e di dimostrazioni» (Hilbert-Bernays 1968-70, I, 1). Perciò non contiene nulla di nuovo rispetto ad essi, si limita ad esplicitare ciò che è già contenuto implicitamente in essi. Infatti, «nella derivazione di conseguenze dagli assiomi, le arbitrarie che compaiono negli assiomi», ossia «quegli oggetti del pensiero e loro combinazioni che a quello stadio sono presi come primitivi», in linea di principio «possono essere rimpiazzate soltanto da tali oggetti del pensiero e loro combinazioni» (Hilbert 1905a, 182).

Può accadere, però, che dagli assiomi venga derivata qualche falsità, in particolare qualche contraddizione. In tal caso lo sviluppo normale della matematica, che consiste nel derivare conseguenze dagli assiomi, si interrompe e si produce una discontinuità: il sistema formale dev'essere abbandonato e sostituito con un altro. Infatti, «l'eliminazione delle contraddizioni che vi si presentano deve avvenire sempre mediante una differente scelta degli assiomi» (Hilbert 1970, III, 151).

Quindi lo sviluppo della matematica ha luogo «attraverso un continuo avvicendarsi di due momenti: la produzione a partire dagli assiomi di nuove formule dimostrabili per mezzo di inferenze formali, e d'altra parte l'introduzione di nuovi assiomi unitamente alla dimostrazione della loro coerenza mediante inferenze contenutistiche» (ivi, III, 180), specificamente finitarie.

Perciò, come osserva Bourbaki, dal punto di vista della concezione fondazionalista lo sviluppo della matematica può essere paragonato a quello di «una grande città, i cui sobborghi avanzano incessantemente, e in modo alquanto caotico, sul territorio circostante, mentre il centro viene ricostruito periodicamente, ogni volta secondo un piano più chiaro e un ordinamento più maestoso, buttando giù i vecchi quartieri con i loro dedali di viuzze, e lanciando verso la periferia strade sempre più dirette, più larghe e più

comode» (Bourbaki 1962, 45). Come il centro di una grande città non si sviluppa incessantemente, per evoluzione continua, ma attraverso rotture radicali, radendo al suolo le vecchie costruzioni e sostituendole con altre, così la matematica non si sviluppa incessantemente, per evoluzione continua, ma attraverso rotture radicali, abbandonando i vecchi sistemi formali e sostituendoli con altri.

3. La base della certezza degli assiomi

Come abbiamo detto, l'assunzione del mondo chiuso riduce il problema di giustificare conoscenze già acquisite a quello di giustificare gli assiomi. Si pone perciò il problema di giustificare gli assiomi. Per risolverlo, la concezione fondazionalista assume che la certezza degli assiomi poggi, direttamente o indirettamente, sull'intuizione sensibile pura.

In particolare, secondo Kant, la certezza degli assiomi poggia direttamente sull'intuizione sensibile pura. Infatti, nella conoscenza matematica dev'esserci «qualcosa di indimostrabile e immediatamente certo, e l'intera nostra conoscenza deve cominciare da proposizioni immediatamente certe» (Kant 1900- , IX, 71). Tali proposizioni sono gli assiomi, i quali «sono principi sintetici a priori, in quanto sono immediatamente certi» (ivi, III, 480). La loro certezza dipende dal fatto che essi «esprimono le condizioni dell'intuizione sensibile a priori» (ivi, III, 150).

Invece, secondo Hilbert, che adotta la concezione astratta del metodo assiomatico, la certezza degli assiomi non può poggiare direttamente sull'intuizione sensibile pura. Alternativamente, essa deve poggiare sulla loro coerenza, che dev'essere dimostrata nella matematica finitaria. Ciò implica che la certezza degli assiomi poggia indirettamente sull'intuizione sensibile pura, perché la matematica finitaria «si basa su un certo tipo di visione intuitiva» in quanto nella sua costruzione «abbiamo bisogno di una certa impostazione intuitiva a priori» (Hilbert 1970, III, 383).

4. L'articolazione dell'assunzione del mondo chiuso

Una formulazione più articolata dell'assunzione del mondo chiuso, integrata con quella che la certezza degli assiomi poggi, direttamente o indirettamente, sull'intuizione sensibile pura, può essere data nel modo seguente.

1) La matematica è dimostrazione di teoremi.

2) La conoscenza matematica è lo scopo della dimostrazione di teoremi e il suo risultato quando ha successo.

3) La conoscenza matematica risultante dalla dimostrazione di teoremi è assolutamente certa.

4) La dimostrazione di teoremi è un processo di giustificazione di conoscenze matematiche già acquisite.

5) Tale processo di giustificazione si basa sul metodo assiomatico.

6) La giustificazione si basa sul fatto che la certezza degli assiomi poggia, direttamente o indirettamente, sull'intuizione sensibile pura, che è una fonte di conoscenza assolutamente certa, e i teoremi si ottengono dagli assiomi mediante inferenze deduttive, la cui conclusione non contiene nulla di essenzialmente nuovo rispetto alle premesse, per cui i teoremi non contengono nulla di essenzialmente nuovo rispetto agli assiomi.

7) Poiché i teoremi si ottengono dagli assiomi mediante inferenze deduttive, la cui conclusione non contiene nulla di essenzialmente nuovo rispetto alle premesse, la dimostrazione di teoremi rimane interamente all'interno di una data teoria, senza avvalersi di interazioni con altre teorie.

8) La scoperta è un processo prematematico irrazionale, quindi non fa parte della matematica. A quest'ultima appartiene, dunque, solo la giustificazione di conoscenze matematiche già acquisite.

5. La natura della matematica

In base a questa formulazione dell'assunzione del mondo chiuso la matematica è dimostrazione di teoremi. Ogni area della matematica può essere interamente governata dando assiomi che permettono di dedurre tutti i teoremi di quell'area. Quindi gli assiomi non servono per dimostrare solo specifici teoremi ma tutti i possibili teoremi dell'area in questione, e perciò non sono locali ma globali.

Non solo la matematica è dimostrazione di teoremi, ma è dimostrazione infallibile di teoremi, perché parte da assiomi la cui certezza poggia, direttamente o indirettamente, sull'intuizione sensibile pura, che è una fonte di conoscenza assolutamente certa, e ottiene teoremi da essi mediante inferenze la cui conclusione non contiene nulla di essenzialmente nuovo rispetto alle premesse.

Questo distingue la matematica dalle altre scienze, che sono formulazioni fallibili di leggi, perché partono da ipotesi che, per quanto ben stabilite, sono sempre suscettibili di revisioni. Invece i teoremi, una volta che ne è stata data una dimostrazione, sono stabiliti definitivamente e non richiedono né sono suscettibili di revisioni.

PARTE II

I LIMITI DELLA CONCEZIONE FONDAZIONALISTA

8
I risultati limitativi

1. Incompletezza e indecidibilità

I programmi di Hilbert hanno ricevuto un colpo mortale dai teoremi di incompletezza di Gödel, che ne hanno determinato il crollo definitivo. Ma anche altri risultati hanno implicazioni distruttive per essi.

Nell'esporre tali risultati, per brevità chiameremo sistemi formali appropriati quei sistemi formali che contengono un minimo di aritmetica e sono coerenti.

Il passo 1) del programma della coerenza di Hilbert richiede di rappresentare la matematica infinitaria mediante un sistema formale appropriato, completo e decidibile. Ora, il seguente risultato implica che un tale sistema non può esistere.

> *Primo teorema di incompletezza di Gödel*. Ogni sistema formale appropriato S è incompleto. Infatti esiste un enunciato G di S (specificamente, un enunciato che esprime una proposizione reale) tale che né G né la sua negazione $\neg G$ sono dimostrabili in S, e tuttavia G è vero.

In base a tale risultato, il passo 1) del programma della coerenza di Hilbert non può essere realizzato perché ogni sistema formale appropriato mediante il quale si rappresenta la matematica infinitaria è incompleto.

Anche il seguente risultato implica che un sistema formale come quello richiesto dal passo 1) del programma della coerenza di Hilbert non può esistere.

> *Teorema di indecidibilità*. Ogni sistema formale appropriato S è indecidibile, cioè non esiste alcun metodo

meccanico per determinare, per ogni formula A di S, se A è dimostrabile o non è dimostrabile in S.

In base a tale risultato, il passo 1) del programma della coerenza di Hilbert non può essere realizzato perché ogni sistema formale appropriato mediante il quale si rappresenta la matematica infinitaria è indecidibile.

Si noti che dal teorema di indecidibilità segue non soltanto che ogni sistema formale appropriato è indecidibile, ma anche che esso è incompleto. Infatti, se un sistema formale S è appropriato e completo, S è anche decidibile.

Per vederlo, supponiamo che S sia appropriato e completo. Sia A un enunciato qualsiasi di S. L'insieme delle dimostrazioni di S, e perciò l'insieme degli enunciati dimostrabili in S, sono enumerabili meccanicamente mediante il cosiddetto algoritmo del British Museum, che elenca tutte le dimostrazioni di S secondo un ordine sistematico fissato. Mediante tale algoritmo enumeriamo tutti gli enunciati dimostrabili in S ed esaminiamo se tra essi compare A oppure $\neg A$ (uno di essi deve comparirvi perché S è completo). Nel primo caso A è dimostrabile in S. Nel secondo caso, poiché S è coerente, A non è dimostrabile in S. Dunque S è decidibile.

Poiché S, se è appropriato e completo, è anche decidibile, ne segue che, nel passo 1) del programma della coerenza di Hilbert, il requisito che il sistema formale S sia decidibile è ridondante.

2. Indefinibilità della verità

Il passo 1) del programma della coerenza di Hilbert richiede di rappresentare la matematica infinitaria mediante un sistema formale che, oltre ad essere appropriato, completo e decidibile, sia anche espressivo, cioè permetta di esprimere tutti i concetti della matematica infinitaria. Ora, il seguente risultato implica che un tale sistema non può esistere.

> *Teorema di indefinibilità della verità di Tarski*. Per ogni sistema formale appropriato S, l'insieme dei numeri di Gödel di enunciati di S veri nella struttura dei numeri naturali $\mathcal{N}$ non è esprimibile in S (e a fortiori non è enumerabile meccanicamente).

In base a tale risultato, il passo 1) del programma della coerenza di Hilbert non può essere realizzato perché nessun sistema formale appropriato S mediante il quale si rappresenta la matematica infinitaria permette di esprimere il concetto di insieme dei numeri di Gödel di enunciati di S veri nella struttura dei numeri naturali $\mathcal{N}$.

3. Indimostrabilità della coerenza

Il passo 2) del programma della coerenza di Hilbert richiede di dimostrare nella matematica finitaria la coerenza del sistema formale appropriato mediante il quale si rappresenta la matematica infinitaria. Ora, il seguente risultato implica che questo è impossibile.

> *Secondo teorema di incompletezza di Gödel*. Per ogni sistema formale appropriato *S*, l'enunciato che esprime canonicamente la coerenza di *S* (una proposizione reale) non è dimostrabile in *S*. Per enunciato che esprime canonicamente la coerenza di *S* si intende un enunciato che è la trascrizione letterale della definizione della coerenza di *S*.

In base a tale risultato, il passo 2) del programma della coerenza di Hilbert non può essere realizzato perché, per ogni sistema formale appropriato *S* mediante il quale si rappresenta la matematica infinitaria, l'enunciato che esprime canonicamente la coerenza di *S* non è dimostrabile in *S*. Per dimostrarlo c'è «sempre bisogno di qualche metodo dimostrativo che trascende il sistema» (Gödel 1986- , III, 34). Non essendo dimostrabile in *S*, tale enunciato non è dimostrabile neppure nella matematica finitaria, perché quest'ultima è una parte propria della matematica infinitaria e, per il passo 1) del programma della coerenza di Hilbert, *S* dev'essere completo.

Si noti che la condizione che l'enunciato che esprime la coerenza di *S* debba esprimerla canonicamente, è essenziale per la validità del secondo teorema di incompletezza di Gödel. Sono stati trovati, infatti, vari esempi di enunciati che non esprimono canonicamente la coerenza di *S* e sono dimostrabili in *S*. Dunque, senza tale condizione, «la coerenza (nel senso della indimostrabilità di una proposizione e della sua negazione), anche di sistemi *S* molto forti, può essere dimostrabile in *S*» (ivi, II, 305).

Per assicurare che un enunciato che esprime la coerenza di *S* la esprima canonicamente, sono state formulate alcune condizioni, le cosiddette condizioni di Hilbert-Bernays. Sebbene esse, senza condizioni aggiuntive, non assicurino che un enunciato che esprime la coerenza di *S* la esprima canonicamente, tuttavia sono sufficienti per la validità del secondo teorema di incompletezza di Gödel. Quest'ultimo, cioè, vale se in esso, per enunciato che esprime canonicamente la coerenza, si intende un enunciato che soddisfa le condizioni di Hilbert-Bernays.

4. Indimostrabilità della coerenza esterna

Alcuni, però, negano che le condizioni Hilbert-Bernays «siano qualcosa a cui l'hilbertiano è impegnato dalla natura della sua impresa», sostengono che «non esiste alcuna ragione» di supporlo, e perciò contestano che il secondo teorema di incompletezza di Gödel «si applichi al programma di Hilbert in sé» (Detlefsen 1990, 345). A loro parere il risultato di Gödel non fornisce una prova conclusiva dell'irrealizzabilità del passo 2) del programma della coerenza di Hilbert.

Tuttavia, anche se la loro obiezione fosse fondata, questo non salverebbe il programma di Hilbert dal crollo. Infatti, per dimostrare che il passo 2) del programma della conservazione di Hilbert, che come sappiamo è equivalente al passo 2) del programma della coerenza, non può essere realizzato, non c'è bisogno del secondo teorema di incompletezza di Gödel.

Infatti, il passo 2) del programma della conservazione di Hilbert richiede di dimostrare nella matematica finitaria la coerenza esterna del sistema formale appropriato mediante il quale si rappresenta la matematica infinitaria. Ora, il seguente risultato implica che questo è impossibile.

> *Terzo teorema di incompletezza di Gödel*. Per ogni sistema formale *S* contenente un minimo di aritmetica ed esternamente coerente, l'enunciato che esprime la coerenza esterna di *S* (un enunciato che esprime una proposizione reale) non è dimostrabile in *S*.

In base a tale risultato, il passo 2) del programma della conservazione di Hilbert non può essere realizzato perché, per ogni sistema formale *S* esternamente coerente mediante il quale si rappresenta la matematica infinitaria, l'enunciato che esprime la coerenza esterna di *S* non è dimostrabile in *S*. Non essendo dimostrabile in *S*, esso non è dimostrabile neppure nella matematica finitaria. Ciò segue dal fatto che quest'ultima è una parte propria della matematica infinitaria e, per il passo 1) del programma della conservazione di Hilbert, *S* dev'essere completo.

D'altra parte, «per 'giustificare', nel senso del programma di Hilbert, gli assiomi infinitari di un sistema *S*, è necessario dimostrare questa coerenza 'esterna' di *S* (che per i sistemi usuali è banalmente equivalente alla coerenza)» (Gödel 1986- , II, 305). E, naturalmente, è necessario dimostrarla nella matematica finitaria. Perciò il terzo teorema di incompletezza di Gödel implica che gli assiomi infinitari di *S* non possono essere giustificati nel senso del programma di Hilbert.

La validità del terzo teorema di incompletezza di Gödel non dipende dalle condizioni di Hilbert-Bernays. Perciò tale risultato non è soggetto alle obiezioni che sono state avanzate contro il fatto che il secondo teorema di incompletezza di Gödel fornisca una prova conclusiva dell'irrealizzabilità del passo 2) del programma della coerenza di Hilbert. Per questo motivo Gödel

afferma che il suo terzo teorema di incompletezza è «la versione migliore e più generale dell'indimostrabilità della coerenza nel sistema» (*ibid.*).

5. Non-caratterizzabilità

Il passo 1) del programma della coerenza di Hilbert richiede di rappresentare la matematica infinitaria mediante un sistema formale che, oltre ad essere appropriato, completo, decidibile ed espressivo, sia anche completo rispetto alla validità logica, cioè tale che le sue regole logiche permettano di dimostrare tutti gli enunciati logicamente validi.

Può esistere un tale sistema formale? Per rispondere a questa domanda, consideriamo anzitutto il caso in cui il sistema formale in questione sia un sistema formale del primo ordine, cioè un sistema formale basato sulla logica del primo ordine. Per la logica del primo ordine vale il seguente risultato.

> *Teorema dell'esistenza del modello*. Per ogni insieme di enunciati del primo ordine S, se S è coerente, allora S ha un modello $\mathscr{I}$ (cioè un'interpretazione in cui tutti gli enunciati di S sono veri). Inoltre tale modello $\mathscr{I}$ è contabile (cioè finito o numerabile).

Questo risultato sembra giustificare l'affermazione di Hilbert che la coerenza è una condizione sufficiente per la verità.

Dal teorema dell'esistenza del modello segue facilmente il seguente risultato.

> *Teorema di completezza di Gödel*. Le consuete regole della logica del primo ordine hanno la proprietà che ogni enunciato del primo ordine logicamente valido è dimostrabile mediante tali regole.

Infatti, supponiamo che un enunciato del primo ordine A sia logicamente valido ma non sia dimostrabile mediante le consuete regole della logica del primo ordine. Allora l'insieme $\{\neg A\}$ è coerente, perciò per il teorema dell'esistenza del modello $\{\neg A\}$ ha un modello, diciamo $\mathscr{I}$. Dunque $\neg A$ è vero in $\mathscr{I}$, e quindi A è falso in $\mathscr{I}$. Ma, essendo logicamente valido, A dev'essere vero in $\mathscr{I}$. Contraddizione. Se ne conclude che A dev'essere dimostrabile mediante le consuete regole della logica del primo ordine.

In base a tale risultato, il passo 1) del programma della coerenza di Hilbert può essere realizzato (per la parte che richiede di rappresentare la matematica infinitaria mediante un sistema formale completo rispetto alla

validità logica), se per sistema formale si intende sistema formale del primo ordine. Infatti, le consuete regole della logica del primo ordine sono tali che ogni enunciato del primo ordine logicamente valido è dimostrabile mediante tali regole.

Tuttavia l'affermazione che, nel caso della logica del primo ordine, il teorema dell'esistenza del modello sembra giustificare l'affermazione di Hilbert che la coerenza è una condizione sufficiente per la verità, va ridimensionata.

Infatti, per il teorema dell'esistenza del modello, se il sistema formale del primo ordine S mediante il quale si rappresenta la matematica infinitaria è coerente, allora S ha un modello $\mathscr{I}$ contabile. Ora, in $\mathscr{I}$ sono veri tutti i teoremi di S, e tra essi è compreso anche un teorema A che afferma: esistono insiemi non-contabili. Dunque A è vero in $\mathscr{I}$ sebbene $\mathscr{I}$ sia contabile. Questo non costituisce un paradosso, ma implica che A è vero in $\mathscr{I}$ solo in quanto al concetto di 'non-contabile' che occorre in A non si assegna in $\mathscr{I}$ il suo significato principale bensì un significato anomalo.

Dunque la coerenza di S non assicura che i teoremi di S sono veri nell'interpretazione principale, ma solo che essi sono veri in un'interpretazione anomala. Perciò l'affermazione di Hilbert che la coerenza è una condizione sufficiente per la verità, va ridimensionata nel senso che, nel caso dei sistemi formali del primo ordine, la coerenza è sì una condizione sufficiente per la verità, ma non per la verità nell'interpretazione principale, bensì solo per la verità in un'interpretazione anomala.

Inoltre, dal teorema dell'esistenza del modello segue facilmente il seguente risultato.

> *Teorema di Löwenheim-Skolem*. Per ogni insieme di enunciati del primo ordine S, se S ha un modello allora S ha un modello contabile.

Infatti, se S ha un modello, allora S è coerente (altrimenti nel modello sarebbe vera qualche A e anche la sua negazione $\neg A$, il che è impossibile). Perciò, per il teorema dell'esistenza del modello, S ha un modello contabile $\mathscr{I}$.

In base a tale risultato, se il sistema formale del primo ordine S mediante il quale si rappresenta la matematica infinitaria ha un modello principale $\mathscr{U}$ (cioè un modello in cui i teoremi di S sono veri nell'interpretazione principale), allora S ha anche un modello contabile $\mathscr{I}$. Ma $\mathscr{U}$ è non-contabile mentre $\mathscr{I}$ è contabile, perciò $\mathscr{U}$ e $\mathscr{I}$ non possono essere isomorfi. Dunque S ha modelli non isomorfi, e quindi qualitativamente differenti. Pertanto S non riesce a caratterizzare i concetti di cui tratta. Se ne conclude che i sistemi formali del primo ordine non riescono a caratterizzare i concetti matematici.

6. Esistenza di estensioni false

Non solo l'affermazione di Hilbert che la coerenza è una condizione sufficiente per la verità dev'essere ridimensionata, ma essa è addirittura falsa poiché vale il seguente risultato.

> *Teorema dell'esistenza di estensioni appropriate false*. Per ogni sistema formale appropriato S esiste un'estensione appropriata S' di S in cui è dimostrabile un enunciato falso.

Infatti, se S è un sistema formale appropriato, per il primo teorema di incompletezza di Gödel esiste un enunciato G di S tale che G non è dimostrabile in S e tuttavia G è vero. Poiché G non è dimostrabile in S, l'estensione $S' = S \cup \{\neg G\}$ di S è coerente (altrimenti G sarebbe dimostrabile in S), quindi è appropriata. Poiché G è vero, $\neg G$ è falso. Ma banalmente $\neg G$ è dimostrabile in S'. Dunque, aggiungendo $\neg G$ agli assiomi di S, si ottiene un sistema coerente in cui è dimostrabile un enunciato falso, anzi, poiché $\neg G$ esprime una proposizione reale, un enunciato «la cui falsità potrebbe essere riconosciuta mediante considerazioni finitarie» (ivi, I, 200).

In base a tale risultato la coerenza non è una condizione sufficiente per la verità, perché ogni sistema formale appropriato S mediante il quale si rappresenta la matematica infinitaria ha un'estensione S' che è appropriata, e quindi coerente, ma in cui si può dimostrare un enunciato falso. Dunque la coerenza di S' non costituisce una condizione sufficiente perché in S' si dimostrino solo enunciati veri.

Questa conclusione non si applica solo al caso in cui S sia un sistema formale del primo ordine, ma anche al caso in cui S sia un sistema formale del secondo ordine, cioè un sistema formale basato sulla logica del secondo ordine. Infatti, il primo teorema di incompletezza di Gödel vale sia per i sistemi formali del primo ordine sia per quelli del secondo ordine.

Ciò mostra i limiti dell'affermazione di Hilbert che la coerenza è una condizione sufficiente per la verità, e conferma la tesi di Kant che una conoscenza che non si contraddice non sempre è vera.

7. Incompletezza rispetto alla validità logica

Abbiamo detto che i sistemi formali del primo ordine non riescono a caratterizzare i concetti matematici. Ciò porta a chiedersi se i sistemi formali del secondo ordine si sottraggano invece a tale limite.

Per rispondere a questa domanda consideriamo l'aritmetica del secondo ordine P^2. Per essa vale il seguente risultato (dove, come negli altri risultati di questo paragrafo, per modello intendiamo modello pieno, ossia modello in cui le variabili del secondo ordine per insiemi variano su tutti i sottoinsiemi del dominio).

> *Teorema di categoricità di Dedekind.* P^2 è categorica, cioè tutti i suoi modelli sono isomorfi.

In base a tale risultato, P^2 caratterizza i suoi modelli a meno di isomorfismi, quindi ha essenzialmente un unico modello. Poiché la struttura dei numeri naturali $\mathcal{N}$ è un modello di P^2, ne segue che P^2 caratterizza il concetto di numero naturale.

Dunque, a differenza dei sistemi formali del primo ordine, i sistemi formali del secondo ordine permettono di caratterizzare il concetto di numero naturale.

Questo vantaggio dei sistemi formali del secondo ordine rispetto a quelli del primo ordine va, però, a discapito della loro completezza rispetto alla validità logica. Infatti, mediante il teorema di categoricità di Dedekind, si può stabilire il seguente risultato.

> *Teorema della non-esistenza del modello*. Esiste un insieme di enunciati del secondo ordine che è coerente ma non ha un modello.

Infatti, la struttura dei numeri naturali $\mathcal{N}$ è un modello di P^2, quindi P^2 è coerente (altrimenti in $\mathcal{N}$ sarebbe vera qualche A e anche la sua negazione $\neg A$, il che è impossibile). Perciò per il primo teorema di incompletezza di Gödel, che vale sia per i sistemi formali appropriati del primo ordine che per quelli del secondo ordine, esiste un enunciato G di P^2 tale che G non è dimostrabile in P^2 e tuttavia G è vero in $\mathcal{N}$. Poiché G non è dimostrabile in P^2, ne segue che $P^2 \cup \{\neg G\}$ è coerente. Supponiamo che $P^2 \cup \{\neg G\}$ abbia un modello, diciamo $\mathcal{I}$. Allora $\mathcal{I}$ è un modello di P^2 e di $\neg G$, perciò G è falso in $\mathcal{I}$. Ma poiché $\mathcal{I}$ e $\mathcal{N}$ sono entrambi modelli di P^2, per il teorema di categoricità di Dedekind $\mathcal{I}$ e $\mathcal{N}$ devono essere isomorfi. Poiché G è falso in $\mathcal{I}$, ne segue allora che G è falso anche in $\mathcal{N}$. Contraddizione. Se ne conclude che $P^2 \cup \{\neg G\}$ non ha un modello.

In base a tale risultato, il teorema dell'esistenza del modello non vale per la logica del secondo ordine. Dunque la coerenza non è una condizione sufficiente perché un sistema formale del secondo ordine abbia un modello.

Mediante il teorema di categoricità di Dedekind si può stabilire anche il seguente risultato.

> *Teorema di trasferimento*. Sia C la congiunzione degli assiomi di P^2 (che esiste perché P^2 ha un numero finito di assiomi). Allora, per ogni enunciato A di P^2, A è vero in $\mathcal{N}$ se e solo se $C \to A$ è logicamente valido.

Infatti, supponiamo che A sia vero in $\mathcal{N}$. Sia $\mathcal{I}$ un modello qualsiasi di C. Poiché anche $\mathcal{N}$ è un modello di C, per il teorema di categoricità di Dedekind $\mathcal{I}$ è isomorfo ad $\mathcal{N}$. Ma allora, dal fatto che A è vero in $\mathcal{N}$, segue che A è vero anche in $\mathcal{I}$, dunque $\mathcal{I}$ è un modello di A. Abbiamo così dimostrato che ogni modello di C è un modello di A, dunque $C \to A$ è logicamente valido. Viceversa, supponiamo che $C \to A$ sia logicamente valido. Poiché $\mathcal{N}$ è un modello di C, ne segue che $\mathcal{N}$ è un modello anche di A, cioè che A è vero in $\mathcal{N}$. Questo stabilisce il risultato.

Dal teorema di trasferimento si può ottenere facilmente il seguente risultato.

> *Teorema di non-enumerabilità meccanica*. L'insieme degli enunciati del secondo ordine logicamente validi non è enumerabile meccanicamente.

Infatti, supponiamo che l'insieme degli enunciati del secondo ordine logicamente validi sia enumerabile meccanicamente. Allora tale è in particolare l'insieme degli enunciati del secondo ordine logicamente validi della forma $C \to A$, dove C è la congiunzione degli assiomi di P^2 e A è un enunciato di P^2. Perciò, per il teorema di trasferimento, l'insieme degli enunciati A di P^2 veri in $\mathcal{N}$ è enumerabile meccanicamente. Ma, per il teorema di indefinibilità della verità di Tarski, che vale sia per i sistemi formali del primo ordine sia per quelli del secondo ordine, l'insieme dei numeri di Gödel di enunciati A di P^2 veri in $\mathcal{N}$ non è enumerabile meccanicamente. Perciò l'insieme degli enunciati A di P^2 veri in $\mathcal{N}$ non è enumerabile meccanicamente. Contraddizione. Se ne conclude che l'insieme degli enunciati del secondo ordine logicamente validi non è enumerabile meccanicamente.

Dal teorema di non-enumerabilità meccanica si ottiene infine il seguente risultato.

> *Teorema di incompletezza della logica del secondo ordine*. Non esiste alcun insieme di regole per la logica del secondo ordine avente la proprietà che ogni enunciato del secondo ordine logicamente valido è dimostrabile mediante tali regole.

Infatti, supponiamo che un tale insieme di regole esista. L'insieme delle dimostrazioni generate mediante queste regole è enumerabile meccanicamente per mezzo dell'algoritmo del British Museum, quindi anche l'insieme degli enunciati dimostrabili mediante tali regole lo è. Perciò, in base alla nostra assunzione, l'insieme degli enunciati del secondo ordine logicamente validi è enumerabile meccanicamente. Ma, per il teorema di non-enumerabilità meccanica, l'insieme degli enunciati del secondo ordine logicamente validi non è enumerabile meccanicamente. Contraddizione. Se ne conclude che non può esistere alcun insieme di regole per la logica del secondo ordine avente la proprietà che ogni enunciato del secondo ordine logicamente valido è dimostrabile mediante tali regole.

In base a tale risultato, il passo 1) del programma della coerenza di Hilbert non può essere realizzato se per sistema formale si intende sistema formale del secondo ordine, perché nessun sistema formale del secondo ordine è completo rispetto alla validità logica, comunque si scelgano le regole per la logica del secondo ordine.

9
Le resistenze al crollo

1. Formalizzabilità della matematica nota

Contro l'affermazione che i programmi di Hilbert abbiano ricevuto un colpo mortale dai teoremi di incompletezza di Gödel sono state avanzate varie obiezioni, che però ad un attento esame si rivelano infondate. In seguito ne considereremo alcune.

Contro l'affermazione che, a causa del primo teorema di incompletezza di Gödel, il passo 1) del programma della coerenza di Hilbert non può essere realizzato, Hilbert e Bernays hanno obiettato che, sebbene il risultato di Gödel implichi che non si può «introdurre l'idea di un sistema totale della matematica in un senso filosofico di principio», esso non esclude che si possa «caratterizzare il sistema dell'analisi e della teoria degli insiemi effettivamente esistente», ossia il sistema formale *S* in cui si possono dimostrare tutti i teoremi dell'analisi e della teoria degli insiemi attualmente noti, «come costituente un ambito idoneo per un inquadramento delle discipline geometriche e fisiche» (Hilbert-Bernays 1968-70, II, 289). Infatti, pur non permettendo di rappresentare tutta la matematica infinitaria possibile, *S* permette di rappresentare tutta la matematica infinitaria attualmente nota, e «può rispondere a questo scopo anche senza avere la proprietà della piena chiusura deduttiva» (*ibid*.), cioè, senza essere completo. Ora, un sistema formale che permette di rappresentare tutta la matematica infinitaria attualmente nota è tutto quanto occorre per realizzare il passo 1) del programma della coerenza di Hilbert.

Questa obiezione trascura però che, anche ammettendo che si possa realizzare il passo 1) del programma della coerenza di Hilbert nel senso ristretto che si può rappresentare tutta la matematica infinitaria attualmente nota mediante un sistema formale *S*, nulla assicura che il passo 2) di tale programma sia realizzabile per tale *S*, anzi il secondo teorema di incompletezza di Gödel lo esclude. Ma, quand'anche fosse realizzabile,

questo giustificherebbe soltanto la matematica infinitaria attualmente nota, non le sue estensioni future. Quindi non permetterebbe di raggiungerebbe lo scopo ultimo di Hilbert di far scomparire definitivamente le questioni fondazionali nella matematica.

2. Formalizzabilità in una successione di sistemi formali

Contro l'affermazione che, a causa del primo teorema di incompletezza di Gödel, il passo 1) del programma della coerenza di Hilbert non può essere realizzato, Gödel ha obiettato che, sebbene sia «impossibile formalizzare tutta la matematica in un unico sistema formale», nondimeno «tutto ciò che è matematico è formalizzabile» (Gödel 1986- , I, 388). È formalizzabile non in un unico sistema formale ma in una successione transfinita di sistemi formali. Dunque, invece di considerare un singolo sistema formale, si tratta semplicemente di considerare «una successione (continuabile nel transfinito) di sistemi formali» (ivi, I, 236).

Questa obiezione trascura, però, che, per affermare che tutto ciò che è matematico è formalizzabile in una successione (continuabile nel transfinito) di sistemi formali, il passaggio da un sistema formale al sistema formale successivo dovrebbe avvenire in modo formale, cioè meccanico. Se, infatti, esso non avvenisse in modo meccanico ma richiedesse un appello all'intuizione, non si potrebbe dire che tutto ciò che è matematico è formalizzabile, perché l'appello all'intuizione porterebbe al di là del formalizzabile.

Ma, se il passaggio da un sistema formale della successione transfinita di sistemi formali al sistema formale successivo avviene in modo meccanico, allora per tale successione si può dimostrare un risultato che è «un analogo esatto del primo teorema di Gödel» (McCarthy 1994, 427). Pertanto non tutte le verità matematiche sono formalizzabili nella successione transfinita di sistemi formali. Se ne deve concludere, perciò, che la matematica non può consistere nell'attività di «un matematico idealizzato che adotta una successione di teorie successive e le cui scelte delle teorie sono determinate in modo effettivo ad ogni stadio» (ivi, 444).

3. Non-formalizzabilità della matematica finitaria

Contro l'affermazione che, a causa del secondo teorema di incompletezza di Gödel, il passo 2) del programma della coerenza di Hilbert non può essere realizzato, Gödel ha obiettato che, è vero che il secondo teorema di incompletezza implica che, «per un sistema in cui siano formalizzate tutte le forme di dimostrazione finitarie», è impossibile «una dimostrazione di coerenza finitaria come quella cercata dai formalisti. Ma sembra discutibile che uno dei sistemi presentati finora, per esempio quello dei *Principia*

Mathematica, sia così onnicomprensivo (o che esista affatto un sistema così onnicomprensivo)» (Gödel 1986- , I, 204). Più in generale, sembra discutibile che esista un sistema formale in cui si possano formalizzare tutte le dimostrazione finitarie, perché «di nessun sistema formale si può affermare con certezza che tutte le considerazioni contenutistiche», ossia finitarie, «sono rappresentabili in esso» (ivi, I, 200). Perciò il secondo teorema di incompletezza «non contraddice il punto di vista formalista di Hilbert. Infatti, tale punto di vista presuppone solo l'esistenza di una dimostrazione di coerenza in cui non si usino altro che metodi di dimostrazione finitari, ed è concepibile che esistano dimostrazioni finitarie che non possono essere espresse nel sistema formale» (ivi, I, 195). Quindi è concepibile che non tutti i metodi di dimostrazione finitari siano formalizzabili in un sistema formale *S* mediante il quale si rappresenta la matematica infinitaria.

Questa obiezione trascura però che, anche ammettendo che non tutti i metodi di dimostrazione finitari siano formalizzabili in un tale sistema formale *S*, se nella matematica finitaria si potesse dimostrare l'enunciato che esprime canonicamente la coerenza di *S* non ne seguirebbe che il programma della coerenza di Hilbert è realizzabile. Infatti *S* sarebbe incompleto, e quindi rappresenterebbe solo una parte della matematica infinitaria. Perciò il programma della coerenza di Hilbert non sarebbe realizzabile per tutta la matematica infinitaria ma solo per una sua parte, e questo giustificherebbe solo tale parte. Invece, col suo programma della coerenza, Hilbert voleva giustificare tutta la matematica infinitaria, facendo scomparire definitivamente le questioni fondazionali nella matematica.

Successivamente lo stesso Gödel ha riconosciuto la debolezza della sua obiezione, ammettendo che, «in considerazione del fatto che la coerenza di un sistema formale non può essere dimostrata mediante alcuna procedura deduttiva disponibile nel sistema stesso, per dimostrare la coerenza della matematica classica, e persino della teoria dei numeri classica, è necessario andare al di là dell'ambito della matematica finitaria nel senso di Hilbert. Poiché la matematica finitaria è definita come la matematica dell'intuizione concreta, ciò sembra implicare che per la dimostrazione della coerenza della teoria dei numeri occorrono concetti astratti» (ivi, II, 271-272). Cioè, occorrono concetti «che non hanno come loro contenuto proprietà o relazioni di oggetti concreti (quali le combinazioni di simboli), ma piuttosto proprietà o relazioni di strutture di pensiero o di contenuti di pensiero (per esempio, dimostrazioni, proposizioni dotate di significato, ecc.), dove nelle dimostrazioni di proposizioni su tali oggetti mentali sono necessarie intuizioni che non derivano da una riflessione sulle proprietà combinatorie (spazio-temporali) dei simboli che li rappresentano, ma piuttosto da una riflessione sui significati in gioco» (ivi, II, 272-273). Quindi, sono necessarie intuizioni che vanno al di là dell'intuizione sensibile pura.

È vero che, «per la mancanza di una definizione precisa dell'evidenza concreta o astratta, oggi non esiste una dimostrazione rigorosa dell'insufficienza (persino per la dimostrazione della coerenza della teoria dei numeri) della matematica finitaria. Ma questo fatto sorprendente è stato abbondantemente chiarito dall'esame dell'induzione fino a ε_0 usata nella dimostrazione di Gentzen della coerenza della teoria dei numeri. La situazione può essere descritta grosso modo così: la ricorsione fino a ε_0 potrebbe essere dimostrata finitariamente se la coerenza della teoria dei numeri potesse esserlo. D'altra parte la validità di tale ricorsione non può certo essere resa immediatamente evidente», perché ε_0 non può essere ottenuto «mediante un passaggio passo per passo da numeri ordinali più piccoli a numeri ordinali più grandi, dal momento che i passi concretamente evidenti, come $\alpha \to \alpha^2$, sono così piccoli che dovrebbero essere ripetuti ε_0 volte per raggiungere ε_0» (ivi, II, 273). Dunque la dimostrazione di Gentzen usa concetti e metodi che vanno al di là dell'intuizione sensibile pura.

Lo stesso vale per tutte le altre dimostrazioni della coerenza della teoria dei numeri attualmente note. Ciò rende inverosimile supporre che esista una dimostrazione finitaria della coerenza della teoria dei numeri che non sia esprimibile in alcun sistema formale mediante il quale si rappresenta la matematica infinitaria. Gli stessi Hilbert e Bernays scartano questa possibilità quando riconoscono che sarebbe «paradossale che i metodi della teoria finitaria della dimostrazione debbano, per un certo verso, essere superiori a quelli dell'analisi e della teoria degli insiemi nella dimostrazione di proposizioni» (Hilbert-Bernays 1968-70, II, 290).

4. Utilizzabilità di sistemi con vincoli di coerenza

Contro l'affermazione che, a causa del secondo teorema di incompletezza di Gödel, il passo 2) del programma della coerenza di Hilbert non può essere realizzato, Detlefsen ha obiettato che le condizioni di Hilbert-Bernays da cui dipende la validità del risultato di Gödel non sono qualcosa a cui l'hilbertiano è impegnato dalla natura della sua impresa. Perciò l'hilbertiano può usare sistemi formali «che incorporano vincoli di coerenza nelle condizioni stesse sulla dimostrazione, sulla dimostrabilità, ecc.» (Detlefsen 1990, 344). Per esempio, al posto del sistema formale *S* mediante il quale si rappresenta la matematica infinitaria, l'hilbertiano può usare la variante di Rosser S_R di *S*, che è come *S* tranne che una dimostrazione *d* di *S* viene accettata in S_R se e solo se l'ultima formula di *d* non contraddice l'ultima formula di una dimostrazione *e* di *S* che precede *e* nell'enumerazione di tutte le dimostrazioni di *S* data dall'algoritmo del British Museum (non contraddice, nel senso che l'ultima formula di *d* e l'ultima formula di *e* non sono l'una la

negazione dell'altra). Ovviamente S_R è coerente per definizione, perciò l'enunciato che esprime la coerenza di S_R è banalmente dimostrabile nella matematica finitaria. Certo, per il secondo teorema di incompletezza di Gödel, tale enunciato non soddisfa le condizioni di Hilbert-Bernays, ma per l'hilbertiano questo è irrilevante. Dunque S_R può «fornire all'hilbertiano un modo di realizzare il suo programma senza essere ostacolato dal secondo teorema di incompletezza di Gödel» (ivi, 346).

Questa obiezione trascura, però, che il fatto che l'enunciato che esprime la coerenza di S_R sia banalmente dimostrabile nella matematica finitaria non assicura che nella matematica infinitaria non possano nascere contraddizioni. Per assicurarlo, S_R dovrebbe rappresentare la matematica infinitaria, ma S_R non la rappresenta perché per S_R comunque vale il primo teorema di incompletezza di Gödel. Rimane aperta, perciò, la possibilità che nella matematica infinitaria nascano contraddizioni.

Inoltre S_R non soddisfa il requisito di Hilbert che il sistema formale mediante il quale si rappresenta la matematica infinitaria non dev'essere un costrutto artificioso ma deve corrispondere strettamente al modo di procedere della matematica infinitaria. Secondo Hilbert la procedura mediante la quale si ottiene un tale sistema formale dev'essere «questa: descrivere l'attività del nostro intelletto, redigere un protocollo delle regole in base alle quali procede realmente il nostro pensiero. Il pensare si svolge sempre parallelamente al parlare e allo scrivere, formando proposizioni e collocandole l'una dopo l'altra» (Hilbert 1928, 79-80). Ma S_R non si ottiene mediante tale procedura, perché il modo in cui si costruiscono le dimostrazioni in S_R non corrisponde affatto al modo in cui si costruiscono le dimostrazioni nella matematica infinitaria.

5. Giustificabilità del nocciolo della pratica matematica

Contro l'affermazione che, a causa del secondo teorema di incompletezza di Gödel, il passo 2) del programma della coerenza di Hilbert non può essere realizzato, Simpson ha obiettato che esso può comunque essere realizzato per un sistema formale S mediante il quale si rappresenta il nocciolo della matematica infinitaria. Tale sistema formale S «è abbastanza forte da dimostrare moltissimi teoremi della matematica classica infinitaria, ivi compresi alcuni dei più noti teoremi non costruttivi», perciò «una grande e significativa parte della pratica matematica è finitariamente riducibile» (Simpson 1988, 354). Dunque «il necrologio del programma di Hilbert è a dir poco prematuro. Il teorema di Gödel esclude solo le realizzazioni totali più accurate del programma di Hilbert. Non esclude realizzazioni parziali significative» (ivi, 362). Il fatto che il passo 2) del programma della coerenza

di Hilbert possa essere realizzato per *S* costituisce «un'imbarazzante sconfitta per coloro che avevano gioiosamente presentato il teorema di Gödel come la campana a morto del riduzionismo finitario» (*ibid.*).

Questa obiezione trascura, però, che molti altri importanti teoremi appartenenti al nocciolo della matematica infinitaria non sono dimostrabili in *S* e quindi non sono finitariamente riducibili. Sorprendentemente Simpson afferma che questo «non ci disturba minimamente», ma «semplicemente impedisce che la nostra realizzazione parziale del programma di Hilbert sia totale» (ivi, 360). Al contrario, dovrebbe disturbarlo grandemente perché implica che, mediante il sistema *S*, non si rappresenta il nocciolo della matematica infinitaria ma soltanto un suo frammento, per giunta un frammento dai contorni piuttosto indeterminati e casuali. Perciò il fatto che il passo 2) del programma della coerenza di Hilbert possa essere realizzato per tale frammento non dà una giustificazione neppure del nocciolo della matematica infinitaria.

Senza contare che, anche quei teoremi appartenenti al nocciolo della matematica infinitaria che sono dimostrabili in *S*, non lo sono direttamente ma solo indirettamente, perché richiedono che gli oggetti matematici (numeri reali, funzioni continue, spazi metrici completi separabili, ecc.) siano codificati in modo arbitrario come sottoinsiemi dell'insieme dei numeri naturali.

Simpson sostiene che tale codificazione «non è più arbitraria o gravosa della codificazione che si effettua quando si sviluppa la matematica, ad esempio, in *ZFC* » (*ibid.*), dove *ZFC* è il sistema formale della teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel più l'assioma di scelta. Ma questo non significa che la codificazione degli oggetti matematici in *S* non sia arbitraria, significa soltanto che anche la codificazione degli oggetti matematici in *ZFC* è arbitraria, come è ovvio dal momento che essa non ha uno scopo scientifico ma ideologico: dimostrare che tutte le teorie matematiche sono riducibili alla teoria degli insiemi.

Inoltre, i teoremi appartenenti al nocciolo della matematica infinitaria dimostrabili in *S*, non sono dimostrabili in *S* nel modo in cui vengono dimostrati nei testi standard di matematica, ma con dimostrazioni ad hoc spesso molto differenti da quelle standard.

Simpson motiva la sua obiezione con l'argomento che «la validità della matematica è sotto assedio», che «l'attacco alla matematica fa parte di un generale assalto contro la ragione», e che perciò «i matematici e i filosofi della matematica dovrebbero dedicarsi al compito di difendere la loro disciplina» (ivi, 357-358). A suo parere, dopo Hilbert «la necessità di difendere l'integrità della matematica non è diminuita. Al contrario, il teorema di Gödel ha reso questa necessità più urgente che mai. Gödel ha fornito artiglieria pesante a tutti gli aspiranti assalitori della matematica.

Autori come Kline citano Gödel con monotona ripetitività e con effetti devastanti. L'assalto infuria più che mai» (ivi, 362).

Ma il fatto che il programma di Hilbert possa essere realizzato soltanto per un frammento del nocciolo della pratica matematica, che a sua volta è soltanto un frammento della matematica infinitaria, fornisce a Simpson un'arma spuntata per il suo anacronistico programma di difendere l'integrità della matematica.

10
L'illusione dell'intuizione intellettuale

1. La matematica e lo spirito del tempo

Poiché i programmi con cui Hilbert si proponeva di giustificare la matematica non sono realizzabili, per giustificare la matematica alla concezione fondazionalista non rimane altra possibilità che far appello, invece che all'intuizione sensibile pura, ad un altro tipo di intuizione, l'intuizione intellettuale.

Questa è la via intrapresa da Gödel. Egli nega che i risultati di incompletezza implichino che si debba rinunciare a giustificare la matematica. Se si è rinunciato a ciò non è perché tali risultati ci costringano a farlo, ma perché «questo è l'unico modo possibile per rimanere in accordo con la filosofia prevalente» (Gödel 1986- , III, 380). Per filosofia prevalente Gödel intende una filosofia tendente allo scetticismo e all'empirismo, cioè ad «un pessimismo circa la conoscenza» (ivi, III, 374). Una tale filosofia rappresenta «lo spirito del tempo che ha dominato a partire dal Rinascimento» (ivi, III, 376).

La matematica, «per la sua natura di scienza a priori, ha in sé sempre un'inclinazione» contraria allo scetticismo e all'empirismo, e «per questa ragione ha a lungo opposto resistenza allo spirito del tempo» (*ibid.*). Ma «intorno alla svolta del secolo è suonata anche la sua ora», soprattutto a causa delle «antinomie della teoria degli insiemi, contraddizioni apparse presuntamente nella matematica, il cui significato fu esagerato dagli scettici e dagli empiristi, e che furono usate come pretesto» per rinfocolare lo scetticismo e l'empirismo; «'presuntamente' ed 'esagerato' perché, in primo luogo, queste contraddizioni non si presentarono nella matematica ma al suo confine più esterno con la filosofia, e, in secondo luogo, esse sono state risolte in un modo del tutto soddisfacente e, per chiunque comprenda la teoria, quasi ovvio» (*ibid.*).

Questo, però, non è servito a nulla «contro lo spirito del tempo, e perciò il risultato fu che molti o la maggior parte dei matematici negarono che la matematica, quale si era sviluppata precedentemente, fosse un sistema di verità; essi invece riconobbero ciò solo per una parte della matematica», e intesero «la parte rimanente in un senso ipotetico, cioè nel senso che la teoria asserisce propriamente soltanto che da certe assunzioni (da non giustificare) si possono derivare giustificabilmente certe conclusioni» (*ibid.*).

Ma così «la matematica diventa una scienza empirica, perché se in qualche modo dimostro, a partire da assiomi postulati arbitrariamente, che ogni numero naturale è la somma di quattro quadrati, non ne segue affatto con certezza che non troverò mai un controesempio di questo teorema perché i miei assiomi potrebbero in realtà essere incoerenti, e posso dire tutt'al più che ciò segue con una certa probabilità, perché nonostante molte deduzioni finora non è stata scoperta alcuna contraddizione. Inoltre, con questa concezione ipotetica della matematica, molte questioni perdono la forma: la proposizione A vale o non vale? Infatti, in senso assoluto, da assunzioni arbitrarie non posso certo aspettarmi che esse abbiano la strana proprietà di implicare sempre esattamente A oppure $\neg A$ » (*ibid.*).

Sebbene «queste conseguenze nichilistiche si accordino molto bene con lo spirito del tempo», contro di esse ha però reagito la matematica, la quale «per sua natura è molto recalcitrante di fronte allo spirito del tempo. E così è nato quello strano ermafrodito che è il formalismo di Hilbert, che ha cercato di rendere giustizia sia allo spirito del tempo sia alla natura della matematica» (ivi, III, 378). In esso, infatti, da un lato, «in conformità con le idee prevalenti nella filosofia attuale, si ammette che la verità degli assiomi da cui parte la matematica non può essere giustificata o riconosciuta in alcun modo, e perciò che trarre conseguenze da essi ha significato solo in un senso ipotetico, per cui questo stesso trarre conseguenze (per soddisfare ancora di più lo spirito del tempo) è costruito come un mero gioco di simboli secondo certe regole, anch'esse non sostenute dall'intuizione» (*ibid.*). Dall'altro lato, ci si aggrappa alla credenza, lontana dallo spirito del tempo e corrispondente «all'istinto del matematico, che una dimostrazione della correttezza di una proposizione come la rappresentabilità di ogni numero come somma di quattro quadrati debba fornire un sicuro fondamento per tale proposizione; ed, inoltre, anche che ogni questione si-o-no precisamente formulata nella matematica debba avere una risposta chiara» (*ibid.*).

Ma, a causa dei teoremi di incompletezza di Gödel, «la combinazione hilbertiana di materialismo e di aspetti della matematica classica si dimostra impossibile» (ivi, III, 380). Dunque, per giustificare la matematica, non si può far appello, come pretende Hilbert, all'intuizione sensibile pura.

A questo punto rimangono solo due possibilità: o si rinuncia a giustificare la matematica, cedendo così allo spirito del tempo, oppure si

trova un altro modo di farlo, ponendosi «in contraddizione con lo spirito del tempo» (*ibid.*). Gödel propende decisamente per questa seconda possibilità, perché vuol salvare due scopi, cioè, «da un lato, salvaguardare alla matematica la certezza della sua conoscenza, e, dall'altro lato, conservare la credenza che, per problemi chiari posti dalla ragione, la ragione può anche trovare risposte chiare» (*ibid.*). Secondo Gödel, questi due scopi non sono affatto esclusi dai risultati di incompletezza.

2. L'intuizione intellettuale

Per salvare tali due scopi Gödel, contrariamente a Kant, ricorre all'intuizione intellettuale.

Secondo Gödel, «nonostante la loro lontananza dall'esperienza sensibile, noi abbiamo qualcosa di simile ad una percezione degli oggetti della teoria degli insiemi, come si vede dal fatto che gli assiomi ci si impongono come veri» (ivi, II, 268). Certo, questo presuppone che, oltre alle sensazioni, ci siano date immediatamente altre cose. Ma, «che qualcosa oltre alle sensazioni ci sia davvero dato immediatamente, segue (indipendentemente dalla matematica) dal fatto che anche le nostre idee relative agli oggetti fisici contengono costituenti qualitativamente differenti dalle sensazioni o semplici combinazioni di sensazioni, per esempio, l'idea stessa di oggetto» (*ibid.*).

È vero che, a differenza dei dati dell'esperienza ordinaria, che sono il risultato dell'azione degli oggetti fisici sui nostri sensi, i dati della matematica non sono il risultato dell'azione degli insiemi sui nostri sensi. Ma «non ne segue affatto che i dati di questo secondo tipo, in quanto non possono essere associati ad azioni di certe cose sui nostri organi sensoriali, sono, come asserì Kant, qualcosa di meramente soggettivo. Al contrario, anch'essi possono rappresentare un aspetto della realtà oggettiva, ma, a differenza delle sensazioni, la loro presenza in noi può essere dovuta ad un altro tipo di relazione tra noi e la realtà» (*ibid.*). Quest'altro tipo di relazione è l'intuizione intellettuale. Non vi è alcuna ragione per cui dovremmo aver meno fiducia in essa «che nella percezione sensibile, la quale ci induce a costruire le teorie fisiche e ad aspettarci che le percezioni sensibili future si accorderanno con esse» (*ibid.*).

Per questo motivo, secondo Gödel, «la certezza della matematica non dev'essere assicurata», come voleva Hilbert, «dimostrando certe proprietà mediante una proiezione su sistemi materiali, cioè la manipolazione di simboli fisici, ma piuttosto coltivando (approfondendo) la conoscenza dei concetti astratti stessi che portano alla formulazione di tali sistemi meccanici», ossia i concetti della matematica infinitaria, ed inoltre «cercando di ottenere, mediante le stesse procedure, intuizioni sulla solubilità e sugli

effettivi metodi di soluzione di tutte le proposizioni matematiche dotate di significato» (ivi, III, 382).

Per «estendere la nostra conoscenza di questi concetti astratti, cioè per rendere precisi tali concetti e per raggiungere un'intuizione esauriente e sicura delle relazioni fondamentali che sussistono tra essi, cioè degli assiomi che valgono per essi», non serve, e non basta, cercare di «dare definizioni esplicite dei concetti e dimostrazioni degli assiomi. Per questo, infatti, ovviamente occorrono altri concetti astratti indefinibili e assiomi che valgono per essi. Altrimenti non avremmo nulla a partire da cui definire o dimostrare. La procedura deve consistere invece, almeno in larga misura, in una chiarificazione del significato, che non consiste nel definire» (*ibid.*).

3. Il metodo fenomenologico

Una chiarificazione del significato, secondo Gödel, è possibile. Anzi, oggi «c'è l'inizio di una scienza che afferma di possedere un metodo sistematico per una tale chiarificazione del significato, e questa è la fenomenologia fondata da Husserl. In essa la chiarificazione del significato consiste nell'appuntare più acutamente lo sguardo sui concetti interessati, dirigendo la nostra attenzione in un certo modo, cioè sui nostri atti nell'uso di questi concetti, sulla nostra capacità di compiere quegli atti, ecc.» (*ibid.*). Certo, la fenomenologia «non è una scienza nello stesso senso delle altre scienze. È piuttosto (o comunque dovrebbe essere) una procedura o tecnica che deve produrre in noi un nuovo stato di coscienza in cui descriviamo dettagliatamente i concetti basilari che usiamo nel nostro pensiero, o afferriamo altri concetti basilari finora a noi sconosciuti» (*ibid.*). Tuttavia «non vi è alcuna ragione per respingere dall'inizio come vana una tale procedura» (*ibid.*).

Un indizio del fatto che la fenomenologia è proficua è che, «nell'estensione sistematica degli assiomi della matematica, diventano evidenti», in virtù del significato delle nozioni basilari, «sempre nuovi assiomi che non seguono da quelli stabiliti precedentemente», e i risultati di incompletezza non escludono affatto che «ogni questione matematica del tipo si-o-no posta chiaramente sia solubile in questo modo, perché è proprio questo diventar evidenti di sempre nuovi assiomi in virtù del significato delle nozioni basilari che non può essere imitato da una macchina» (ivi, III, 384).

Secondo Gödel, questa concezione «in linea di principio si accorda con la concezione della matematica di Kant» (*ibid.*). Certo, presa alla lettera la posizione di Kant è insostenibile, perché egli asserisce che «nella derivazione di teoremi geometrici abbiamo bisogno di sempre nuove intuizioni geometriche, e che perciò una derivazione puramente logica da un numero finito di assiomi è impossibile. Questo è dimostrabilmente falso. Ma se in tale proposizione sostituiamo il termine 'geometriche' con

‘matematiche’ o con ‘insiemistiche’, allora essa diventa una proposizione dimostrabilmente vera» (*ibid.*).

Addirittura, secondo Gödel, l’intero metodo fenomenologico «risale, nella sua idea, a Kant», e Husserl lo ha solo «formulato per primo più precisamente, lo ha reso pienamente consapevole e lo ha applicato realmente a particolari domini. In effetti, già dalla terminologia usata da Husserl, si vede quanto positivamente egli stesso valuti il proprio rapporto con Kant» (*ibid.*). Anzi, proprio al fatto che in ultima analisi la filosofia di Kant si basa, sebbene in un modo non del tutto chiaro, sull’idea della fenomenologia, si deve «l’enorme influenza che Kant ha esercitato su tutto lo sviluppo successivo della filosofia» (ivi, III, 386). Nondimeno la mancanza di chiarezza di Kant ha condotto a deviazioni, come l’idealismo e il positivismo. Il requisito di rendere pienamente giustizia a Kant è stato «soddisfatto per la prima volta dalla fenomenologia, che evita sia il salto mortale dell’idealismo verso una nuova metafisica, sia il rifiuto positivistico di ogni metafisica» (*ibid.*).

4. Insufficienza del metodo fenomenologico

Coerentemente con le sue convinzioni, Gödel ha cercato a lungo di utilizzare il metodo fenomenologico (dell’appuntare più acutamente lo sguardo sui concetti astratti) per trovare nuovi assiomi della teoria degli insiemi, capaci di decidere non solo problemi aperti di tale teoria, come l’ipotesi del continuo di Cantor, ma anche problemi aperti della teoria dei numeri, come la congettura di Goldbach. A suo parere, infatti, «sono necessari continui appelli all’intuizione matematica non solo per ottenere risposte non ambigue alle questioni della teoria degli insiemi infinitaria, ma anche per risolvere problemi della teoria dei numeri finitaria (del tipo della congettura di Goldbach)», cioè problemi rappresentati da «proposizioni universali sui numeri interi di cui si può decidere ogni singolo caso particolare» (ivi, II, 269 e nota).

Ma tutti gli sforzi di Gödel sono risultati vani: l’ipotesi del continuo di Cantor e la congettura di Goldbach sono rimaste indecise. È vero che Gödel ha proposto assiomi che implicano che l’ipotesi del continuo è falsa, ma, a parte Gödel, pochi credono nella verità intrinseca di tali assiomi. D’altra parte, un altro famoso problema aperto della teoria dei numeri, il cosiddetto ultimo teorema di Fermat, è stato deciso senza far uso di alcun nuovo assioma della teoria degli insiemi ottenuto col metodo fenomenologico.

L’insuccesso di Gödel non è da ascriversi ad una mancanza di sagacia da parte sua, ma ad una ragione di principio. La speranza di ottenere, mediante il metodo fenomenologico, una penetrazione più profonda del concetto di insieme, è vana proprio a causa del primo teorema di incompletezza di Gödel.

Supponiamo, infatti, di aver ottenuto, mediante il metodo fenomenologico, un'intuizione del concetto di insieme $\mathscr{I}$. Sia S un sistema formale della teoria degli insiemi i cui assiomi l'intuizione ci assicura essere veri rispetto ad $\mathscr{I}$. Poiché $\mathscr{I}$ è un modello di S, ne segue che S è coerente, e quindi è appropriato. Ma allora, per il primo teorema di incompletezza di Gödel, esiste un enunciato G di S che è vero in $\mathscr{I}$ ma non è dimostrabile in S. Dal fatto che G non è dimostrabile in S segue che anche $S \cup \{\neg G\}$ è coerente. Perciò, per il teorema dell'esistenza del modello, $S \cup \{\neg G\}$ ha un modello, diciamo $\mathscr{I}'$. Allora $\mathscr{I}$ e $\mathscr{I}'$ sono entrambi modelli di S, ma G è vero in $\mathscr{I}$ ed è falso in $\mathscr{I}'$ (poiché $\neg G$ è vero in $\mathscr{I}'$). Dunque i concetti di insieme $\mathscr{I}$ e $\mathscr{I}'$ non sono equivalenti.

Ora se, di nuovo mediante il metodo fenomenologico, appuntiamo più acutamente lo sguardo sul modo in cui abbiamo ottenuto $\mathscr{I}'$, arriviamo ad un'intuizione anche di $\mathscr{I}'$. Abbiamo così due diverse intuizioni, una delle quali ci assicura che il vero concetto di insieme è $\mathscr{I}$ mentre l'altra ci assicura che il vero concetto di insieme è $\mathscr{I}'$, e l'enunciato G è vero in base alla prima intuizione mentre è falso in base alla seconda. Quale dei due concetti $\mathscr{I}$ e $\mathscr{I}'$ è il vero concetto di insieme? Il metodo fenomenologico non ci sa dare una risposta.

Ciò mostra la vanità della speranza di Gödel di giustificare la matematica facendo appello all'intuizione intellettuale, e, in unione col fallimento dei programmi di Hilbert, suggerisce che l'intera impresa della concezione fondazionalista di giustificare la matematica facendo appello all'intuizione è impossibile.

11
Il fallimento della concezione fondazionalista

1. Insostenibilità dell'assunzione del mondo chiuso

I risultati di incompletezza di Gödel mostrano non solo che i programmi di Hilbert non sono realizzabili, ma anche che l'assunzione del mondo chiuso è insostenibile.

Infatti, in base a tale assunzione, quale formulata da Hilbert, le teorie matematiche possono essere identificate con quel particolare tipo di sistemi chiusi che sono i sistemi formali. Ma, per il primo teorema di incompletezza di Gödel, la matematica non può consistere nella dimostrazione di teoremi in un sistema formale. Perciò l'assunzione del mondo chiuso è insostenibile.

Contro questa conclusione, e specificamente contro l'affermazione che per il primo teorema di incompletezza di Gödel la matematica non può consistere nella dimostrazione di teoremi in un sistema formale, sono state avanzate, però, alcune obiezioni. Ne esamineremo due, dovute rispettivamente a Hintikka e Prawitz.

2. Vantaggi dell'incompletezza rispetto alla validità logica

Secondo Hintikka, l'affermazione che per il primo teorema di incompletezza di Gödel la matematica non può consistere nella dimostrazione di teoremi in un sistema formale è ingiustificata, perché si basa sull'assunzione che per sistema formale si debba intendere sistema formale del primo ordine.

Essa sarebbe giustificata se tale assunzione fosse plausibile, perché per il teorema di completezza di Gödel le consuete regole della logica del primo ordine sono complete, quindi sono date una volta per sempre e non richiedono estensioni. La logica del primo ordine «è come la logica aristotelica agli occhi di Kant: è essenzialmente completa nel senso informale che in essa non si può fare alcuna scoperta» (Hintikka 2000, 43). Invece gli

assiomi dei sistemi formali del primo ordine non sono dati una volta per sempre perché, per il primo teorema di incompletezza di Gödel, ogni sistema formale appropriato del primo ordine è incompleto, ed «è compito dei matematici ridurre tale incompletezza scoprendo nuovi assiomi» (*ibid.*). Perciò, se fosse plausibile l'assunzione che per sistema formale si debba intendere sistema formale del primo ordine, sarebbe giustificato dire che la matematica non può consistere nella dimostrazione di teoremi in un sistema formale.

Ma tale assunzione non è plausibile, perché «la logica del primo ordine non è abbastanza forte da servire da fondamento appropriato della matematica, nonostante i sogni ad occhi aperti di alcuni logicisti» (ivi, 21). Per esempio, nella logica del primo ordine non si possono esprimere i concetti di equicardinalità, infinito, continuità (nel senso della topologia generale), induzione matematica, ecc.. Quindi l'assunzione in questione renderebbe impossibile esprimere nei sistemi formali alcuni concetti fondamentali della matematica.

Per questo motivo per sistema formale si deve intendere, invece, sistema formale del secondo ordine. È vero che, per il teorema di incompletezza della logica del secondo ordine, la logica del secondo ordine è incompleta, ma «anche se si considera ciò come una perdita, possiamo guadagnarne molto di più» (ivi, 44). Quello che possiamo guadagnarne sono sistemi formali del secondo ordine (aventi modelli infiniti e) categorici, come l'aritmetica del secondo ordine. Essendo categorici, tali sistemi formali caratterizzano i propri modelli a meno di isomorfismi, quindi hanno essenzialmente un unico modello.

L'interesse dei sistemi formali del secondo ordine categorici appare chiaro se si considera l'affermazione di Russell che «la matematica può essere definita come la disciplina nella quale non sappiamo mai di che cosa stiamo parlando» (Russell 1994, 76). Al contrario di quanto afferma Russell, mediante la logica del secondo ordine «possiamo sperare di arrivare ad un punto in cui sappiamo di che cosa stiamo parlando nella matematica, nel senso che possiamo formulare» sistemi formali del secondo ordine categorici «per varie teorie matematiche» (Hintikka 2000, 44). In tali sistemi formali sappiamo di che cosa stiamo parlando perché essi hanno essenzialmente un unico modello.

Ma l'importanza dei sistemi formali del secondo ordine categorici dipende soprattutto dal fatto che essi non ci costringono «a cercare nuovi assiomi, perché i vecchi assiomi implicano già tutto. Ciò che dobbiamo cercare sono regole formali di inferenza logica sempre più forti, studiate per catturare sempre di più della relazione di conseguenza logica» (*ibid.*). In tali sistemi formali «le vere novità sono metodi dimostrativi migliori, non nuovi assiomi» (*ibid.*). In essi «le dimostrazioni non si basano esclusivamente su

una lista chiusa di regole di inferenza, ma possono rendere necessaria la scoperta di nuove regole valide di inferenza» (*ibid.*).

Secondo Hintikka, che i sistemi formali del secondo ordine categorici non ci costringano a cercare nuovi assiomi perché i vecchi assiomi implicano già tutto, «giustifica l'idea che la matematica si occupa primariamente di dimostrare teoremi a partire dagli assiomi» (*ibid.*). Certo, in tali sistemi le dimostrazioni possono rendere necessaria la scoperta di nuove regole per la logica del secondo ordine, poiché questa è incompleta, ma gli assiomi sono dati una volta per sempre e non devono mai essere cambiati. Perciò, per i sistemi in questione, è ingiustificato dire che la matematica non può consistere nella dimostrazione di teoremi in un sistema formale.

Questa obiezione di Hintikka assume, però, che la ricerca di nuove regole per la logica del secondo ordine possa rimanere interamente all'interno di un sistema formale del secondo ordine categorico, i cui assiomi sono dati una volta per sempre. Ma tale assunzione è ingiustificata, perché la ricerca di nuove regole per la logica del secondo ordine in generale comporta la ricerca di nuovi assiomi matematici. Dunque il compito di trovare nuove regole per la logica del secondo ordine si risolve in quello di trovare nuovi assiomi matematici.

Alquanto incongruamente questo viene riconosciuto dallo stesso Hintikka. Infatti, nell'osservare che l'esistenza di sistemi formali del secondo ordine categorici non diminuisce l'importanza del problema di dare aiuti più forti alla deduzione trovando nuove regole per la logica del secondo ordine, Hintikka ammette che, «in pratica, tali aiuti più forti alla deduzione spesso possono essere codificati sotto forma di nuovi assiomi per la teoria matematica in questione», un compito che «non è del tutto dissimile dal compito di trovare assiomi sempre più forti per la teoria degli insiemi» (Hintikka 1996, 99). Ma questo significa che gli assiomi non sono dati una volta per sempre e se ne devono cercare sempre di nuovi. Perciò è giustificato dire che la matematica non può consistere nella dimostrazione di teoremi in un sistema formale.

Di nuovo alquanto incongruamente ciò è ammesso esplicitamente dallo stesso Hintikka. Egli afferma infatti che, «contrariamente all'immagine supersemplificata che la maggior parte dei filosofi ha della pratica matematica, molto di quanto fa il matematico non è dimostrare teoremi dagli assiomi» (ivi, 95). Contrariamente ad un'opinione diffusa, questo «è particolarmente chiaro in quelle branche della matematica che effettivamente partono da un insieme di assiomi dato, per esempio, la teoria dei gruppi» (*ibid.*). L'attività del matematico in tali branche «è solo in misura limitata dimostrazione di teoremi nel senso stretto del termine», e per la maggior parte è invece «ricerca di un quadro generale di tutti i modelli della teoria data, e non delle sue conseguenze deduttive. Per esempio, il matematico classifica i gruppi e dimostra teoremi di rappresentazione per vari tipi di gruppi. Una tale

teorizzazione è largamente indipendente dalle risorse deduttive che sono a disposizione del matematico in questione» (*ibid.*). A queste affermazioni di Hintikka si può solo aggiungere: proprio così.

3. Pensiero matematico e sistemi formali

Secondo Prawitz, l'affermazione che, per il primo teorema di incompletezza di Gödel, la matematica non può consistere nella dimostrazione di teoremi in un sistema formale, è ingiustificata perché, «può essere vero che il pensiero matematico non può coincidere con la dimostrazione di teoremi in un sistema formale», ma «questo non è qualcosa che segue direttamente dal teorema di incompletezza di Gödel» (Prawitz 1998, 330). Chi lo sostiene ricorda «gli infruttuosi tentativi di invocare il teorema di Gödel per dimostrare che il nostro pensiero matematico non può essere generato da una macchina di Turing» (*ibid.*). Gli infruttuosi tentativi in questione sono quelli dello stesso Gödel e di altri. Per esempio, Gödel afferma che il suo teorema di incompletezza implica che «la mente umana (anche nel dominio della matematica pura) sorpassa infinitamente i poteri di qualsiasi macchina finita» (Gödel 1986-, III, 310).

Per Prawitz, invece, «il massimo che si può inferire dal risultato di Gödel è che, se tutto il nostro pensiero matematico procede all'interno di un qualche grande sistema formale, allora non possiamo mai nello stesso tempo conoscere o formulare esplicitamente tale sistema e assumere che esso è corretto (perché allora sorpasseremmo il sistema)» (Prawitz 1998, 330). Per concludere che il risultato di Gödel implica che il pensiero matematico non può consistere nella dimostrazione di teoremi in un sistema formale, e quindi che esso confuta l'assunzione del mondo chiuso secondo cui «il pensiero matematico è rappresentabile in linea di principio in un sistema formale», occorrerebbe «la premessa ingiustificata che il nostro pensiero matematico è in qualche modo completo» (*ibid.*). Ma si tratta, appunto, di una premessa ingiustificata.

Dal fatto che «il nostro pensiero può sorpassare qualunque sistema formale formulato esplicitamente non appena siamo convinti che esso rappresenti un modo di ragionamento corretto», si può soltanto concludere che «non possiamo mai sostituire completamente il nostro pensiero intuitivo con regole formali formulate esplicitamente, come invece veniva vagheggiato in epoca pre-gödeliana» (ivi, 330-331). Questo si accorda con l'affermazione di Turing che, dopo Gödel, è impossibile trovare «una logica formale che elimini del tutto la necessità di usare l'intuizione» (Turing 1939, 216). Secondo Prawitz, tale affermazione di Turing è «del tutto ragionevole» (Prawitz 1998, 331).

Questa obiezione di Prawitz, però, assume che per pensiero matematico si debbano intendere i pensieri matematici di noi menti concrete. Ma, quando si afferma che, per il primo teorema di incompletezza di Gödel, il

pensiero matematico non può consistere nella dimostrazione di teoremi in un sistema formale, non si intende dire questo. Si intende dire soltanto che stabilire verità matematiche non può consistere nella dimostrazione di teoremi in un sistema formale. Perciò, per concludere che il pensiero matematico non può consistere nella dimostrazione di teoremi in un sistema formale, non occorre la premessa ingiustificata che il nostro pensiero matematico, nel senso dei pensieri matematici di noi menti concrete, sia in qualche modo completo.

Per affermare che il pensiero matematico non può consistere nella dimostrazione di teoremi in un sistema formale si può anche ricorrere, invece che al primo teorema di incompletezza di Gödel, al teorema di incompletezza della logica del secondo ordine. In base ad esso, infatti, non esiste alcun insieme di regole per la logica del secondo ordine avente la proprietà che ogni enunciato del secondo ordine logicamente valido è dimostrabile mediante tali regole. Questo significa che stabilire verità logiche del secondo ordine, e a maggior ragione verità matematiche, non può consistere nella dimostrazione di teoremi in un sistema formale.

Anche l'affermazione che, dal fatto che il nostro pensiero può sorpassare qualunque sistema formale formulato esplicitamente non appena siamo convinti che esso rappresenti un modo di ragionamento corretto, si può concludere che noi non possiamo mai sostituire completamente il nostro pensiero intuitivo con regole formali formulate esplicitamente, non sembra corretta. Infatti, per stabilire che l'enunciato G non dimostrabile in un sistema formale appropriato S dato dal primo teorema di incompletezza di Gödel è vero, non dobbiamo ricorrere al nostro pensiero intuitivo bensì ad un'argomentazione, per di più ad un'argomentazione molto semplice, sebbene non formalizzabile in S.

4. Insostenibilità della concezione fondazionalista

Oltre a mostrare che l'assunzione del mondo chiuso è insostenibile, i risultati di incompletezza di Gödel mostrano, più in generale, che la concezione fondazionalista è insostenibile.

Tale concezione vuole giustificare la matematica, e per farlo fa appello all'intuizione. Infatti, la giustificazione della matematica che essa dà si basa sull'assunzione che la certezza degli assiomi poggi, direttamente o indirettamente, sull'intuizione. Ma tale assunzione è insostenibile.

Infatti l'assunzione di Kant che la certezza degli assiomi poggi direttamente sull'intuizione sensibile pura è insostenibile poiché gli assiomi della matematica infinitaria non possono essere esibiti nell'intuizione sensibile pura.

L'assunzione di Hilbert che la certezza degli assiomi poggi sulla loro coerenza, che questa possa essere dimostrata nella matematica finitaria la

quale si basa sull'intuizione sensibile pura, e che quindi la certezza degli assiomi poggi indirettamente sull'intuizione sensibile pura, è insostenibile a causa dei teoremi di incompletezza di Gödel.

L'assunzione di Gödel che la certezza degli assiomi poggi direttamente sull'intuizione intellettuale, coltivata attraverso il metodo fenomenologico dell'appuntare più acutamente lo sguardo sui concetti astratti, è insostenibile a causa del primo teorema di incompletezza di Gödel.

Poiché l'intento della concezione fondazionalista di giustificare la matematica facendo appello all'intuizione, e più specificamente assumendo che la certezza degli assiomi poggi, direttamente o indirettamente, sull'intuizione, è irrealizzabile, e poiché d'altra parte, secondo tale concezione, la base della certezza degli assiomi può stare solo nell'intuizione perché questa è l'unica fonte di conoscenza assolutamente certa, ne segue che una giustificazione della matematica è impossibile.

Perciò delle due cose l'una. O la matematica non è certa, e allora cade il presupposto stesso della concezione fondazionalista che la matematica sia conoscenza assolutamente certa. Oppure la matematica è certa ma non potremo mai stabilirlo, e in tal caso viene meno la ragion d'essere della concezione fondazionalista, che è quella di giustificare la matematica. Dunque la concezione fondazionalista è insostenibile.

12
Intuizione e mostri

1. Mostri

Abbiamo detto che i risultati di incompletezza di Gödel mostrano che la concezione fondazionalista è insostenibile. Ma vi sono anche altre ragioni per cui essa è insostenibile. In questo capitolo e in quelli immediatamente successivi ne esamineremo alcune.

Un'altra ragione per cui la concezione fondazionalista è insostenibile è che, mentre per essa la base della certezza della matematica sta nell'intuizione, l'esperienza matematica ci mostra che l'intuizione ci fa sbagliare.

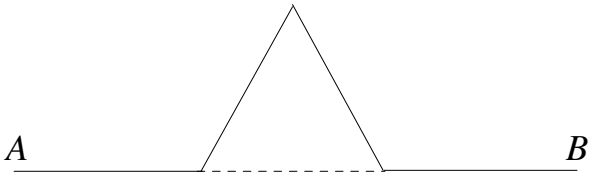
I rischi dell'intuizione sono illustrati da certi oggetti matematici patologici, che sono detti da Poincaré «mostri» (Poincaré 1999, 109-110). In questo capitolo ne considereremo alcuni.

2. Curve e tangenti

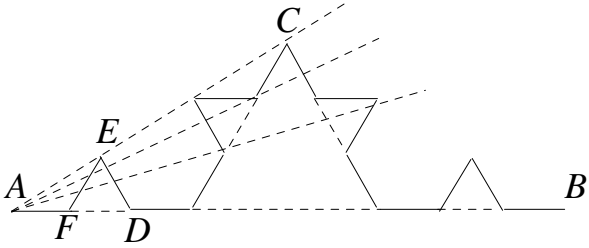
L'intuizione ci dice che una curva continua, ossia ininterrotta, ha una tangente, ossia una direzione, in ogni punto. Essa non è costituita di punti, perché i punti «sono soltanto limiti, ossia meri luoghi della» sua «limitazione; ma questi luoghi presuppongono sempre quelle intuizioni che li limitano o li determinano», e la curva non può essere costituita a partire «dai meri luoghi, considerati come costituenti capaci di essere dati prima» (Kant 1900- , III, 154) della curva. Invece, una curva continua è generata dal moto ininterrotto di un punto. Per questo motivo «quantità di questo genere possono anche essere dette fluenti, perché la sintesi (dell'immaginazione produttiva) nella loro generazione è una progressione nel tempo, la cui continuità è specialmente designata col termine fluire (scorrere)» (*ibid*.). Poiché una curva

continua non è costituita di punti ma è generata mediante il moto ininterrotto di un punto, l'intuizione ci dice che essa ha una tangente in ogni punto.

Al contrario, è facile trovare curve continue che sono prive di tangente in ogni punto: continue nel senso che, preso un punto qualsiasi della curva di coordinate x e y, a variazioni abbastanza piccole di x corrispondono variazioni abbastanza piccole di y. Un esempio è dato dalla curva di von Koch che si ottiene nel modo seguente. Prendiamo un segmento AB, dividiamolo in tre parti eguali, costruiamo sulla sua parte centrale un triangolo equilatero e cancelliamo la parte centrale.



Dividiamo ogni lato della spezzata risultante in tre parti eguali, costruiamo sulla sua parte centrale un triangolo equilatero e cancelliamo la parte centrale.

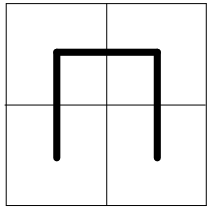


Ripetiamo questo processo all'infinito. La curva risultante è continua perché le cuspidi diminuiscono sempre più in grandezza. Ma essa non ha una tangente in alcun punto. Infatti, consideriamo il punto A. Seguendo il percorso di un punto P che si muove verso A lungo la curva indicata nella figura, vediamo che esso a volte sale su una cuspide (come in C e in E) e a volte scende fino all'asse delle x (come in D e in F). Se continuiamo il processo di costruzione della curva all'infinito, la stessa situazione si ripete per ogni intervallo piccolo a piacere, perché in ogni segmento che parte da A, comunque piccolo, sarà presente una figura del tutto simile a quella indicata nella figura. Se quindi il punto P si muove verso A lungo la curva, la retta PA oscillerà infinite volte senza tendere ad alcuna posizione limite ben determinata. Lo stesso vale per ogni altro punto della curva diverso da A. Dunque la curva non ha una tangente in alcun punto.

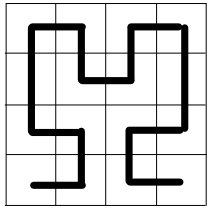
3. Curve e quadrati

L'intuizione ci dice che una curva continua non può riempire un quadrato. Infatti un quadrato, essendo una figura piana, non può essere generato mediante il moto continuo di un punto ma solo mediante il moto continuo di una linea.

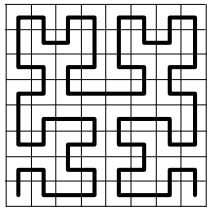
Al contrario, è facile trovare curve continue che riempiono un quadrato. Per esempio, consideriamo la curva di Hilbert, che si ottiene nel modo seguente. Prendiamo un quadrato, dividiamolo in quattro quadrati eguali e congiungiamo con una curva continua i centri dei quattro quadrati risultanti.



Dividiamo ciascuno di questi quattro quadrati in quattro quadrati eguali e congiungiamo con una curva continua i centri dei sedici quadrati risultanti.



Dividiamo ciascuno di questi sedici quadrati in quattro quadrati eguali e congiungiamo con una curva continua i centri dei sessantaquattro quadrati risultanti.



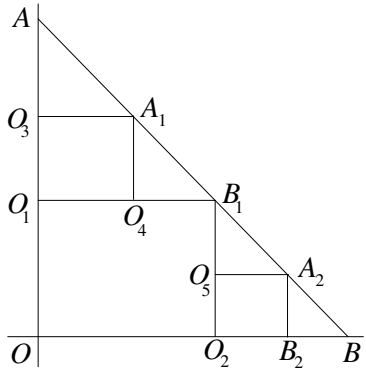
Ripetiamo questo processo all'infinito. In questo modo otteniamo una curva continua che riempie l'intero quadrato, nel senso che contiene tutti i suoi punti.

Si noti che, oltre a darci un esempio di curva continua che riempie l'intero quadrato, la curva di Hilbert ci dà anche un altro esempio di curva continua priva di tangente in ogni punto. Tale curva è continua perché i suoi tratti rettilinei diminuiscono sempre più in grandezza. Ma essa non ha una tangente in alcun punto. Infatti, consideriamo un punto qualsiasi A del quadrato. Seguendo il percorso di un punto P del quadrato che si muove verso A lungo l'ultima curva indicata nella figura, vediamo che la retta PA oscillerà infinite volte senza tendere ad alcuna posizione limite ben determinata. Lo stesso vale per tutti gli altri punti della curva, diversi da A. Quindi la curva non ha una tangente in alcun punto.

4. Curve e lunghezze

L'intuizione ci dice che, se una curva ne approssima a piacere un'altra, la sua lunghezza approssima a piacere la lunghezza di quell'altra curva.

Al contrario, è facile trovare una curva che ne approssima a piacere un'altra, ma la cui lunghezza non approssima a piacere la lunghezza di tale altra curva. Per esempio, consideriamo il triangolo rettangolo AOB seguente, dove AO e OB hanno entrambi lunghezza 1, quindi AOB ha lunghezza 2 e l'ipotenusa AB ha lunghezza $\sqrt{2}$.



Consideriamo la curva a zig-zag $AO_1B_1O_2B$. Ovviamente la sua lunghezza è anch'essa 2, e tale è anche la lunghezza della curva a zig-zag $AO_3A_1O_4B_1O_5A_2B_2B$. Continuando a formare curve a zig-zag in questo modo, otteniamo curve che approssimano a piacere l'ipotenusa AB, tutte di lunghezza 2. Se la lunghezza delle curve a zig-zag risultanti approssimasse a piacere la lunghezza dell'ipotenusa, ciò implicherebbe che il limite di una successione di tutti 2 è $\sqrt{2}$. Ma questo è impossibile. Se ne conclude che

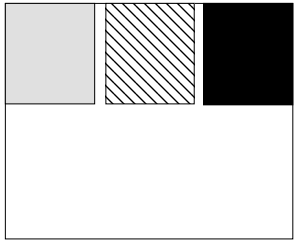
nessuna curva a zig-zag che approssima a piacere l'ipotenusa ha una lunghezza che approssima a piacere la lunghezza dell'ipotenusa.

5. Stati e confini

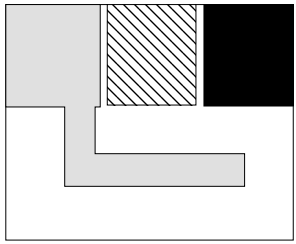
L'intuizione ci dice che tre stati su una mappa non possono toccarsi in tutti i loro punti di confine. Possono toccarsi in qualche punto di confine, ma punti del genere sono isolati.

Al contrario, è facile trovare una mappa in cui tre stati si toccano in tutti i loro punti di confine, nel senso che gli intorni di ogni loro punto di confine contengono punti di ciascuno dei tre stati.

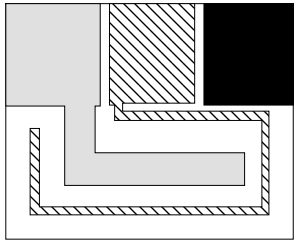
Per esempio, consideriamo la mappa di Brouwer che si ottiene nel modo seguente. Supponiamo di avere tre stati differenti, *A*, *B* e *C*, dove *A* è indicato in grigio, *B* in tratteggiato e *C* in nero e dove le parti non marcate rappresentano territorio non occupato.



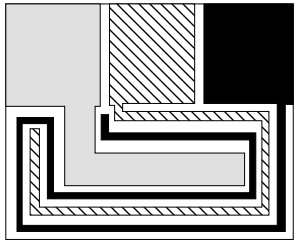
Per estendere la propria sfera di influenza sul territorio non occupato, lo stato *A* decide di espandersi attraverso un corridoio che si spinge a meno di un chilometro da ogni punto del territorio non occupato, ma senza toccare i territori di *B* e *C* (per evitare conflitti).



Lo stato *B*, per non esser da meno, decide di espandersi attraverso un corridoio che si spinge a meno di mezzo chilometro da ogni punto del territorio non ancora occupato, ma senza toccare i territori di *A* e *C*.



Lo stato *C*, per non essere da meno, decidere di espandersi attraverso un corridoio che si spinge a meno di un terzo di chilometro da ogni punto del territorio non ancora occupato, ma senza toccare i territori di *A* e *B*.



A questo punto lo stato *A* riprende l'iniziativa e decide di espandersi attraverso un secondo corridoio che si spinge a meno di un quarto di chilometro da ogni punto del territorio non ancora occupato, ma senza toccare i territori di *B* e *C*.

La sua mossa non rimane, però, senza risposta. Lo stato *B* decide di espandersi attraverso un secondo corridoio, che si spinge a meno di un quinto di chilometro da ogni punto del territorio non ancora occupato, ma senza toccare i territori di *A* e *C*.

A sua volta lo stato *C* decide di espandersi attraverso un secondo corridoio, che si spinge a meno di un sesto di chilometro da ogni punto del territorio non ancora occupato, ma senza toccare i territorio di *A* e *B*. E così via.

Supponiamo che lo stato *A* impieghi un anno per occupare il suo primo corridoio, lo stato *B* impieghi il mezzo anno successivo per occupare il suo primo corridoio, lo stato *C* impieghi il quarto di anno successivo per occupare il suo primo corridoio, lo stato *A* impieghi l'ottavo di anno successivo per occupare il suo secondo corridoio, e così via. È facile vedere che dopo due anni tutto il territorio originariamente non occupato sarà

occupato, e l'intera mappa sarà divisa tra i tre stati in modo che questi si toccano in ogni loro punto di confine.

6. Superfici e aree

L'intuizione ci dice che ogni superficie piana è diversa da zero perché è racchiusa da una linea.

Al contrario, è facile trovare superfici piane eguali a zero. Per esempio, consideriamo il tappeto di Sierpiński che si ottiene nel modo seguente. Prendiamo un quadrato, dividiamolo in nove quadrati più piccoli, tutti della stessa grandezza, ed eliminiamo il quadrato centrale.

Dividiamo ciascuno degli otto quadrati risultanti in nove quadrati più piccoli, tutti della stessa grandezza, ed eliminiamo il quadrato centrale.

Dividiamo ciascuno dei sessantaquattro quadrati risultanti in nove quadrati più piccoli, tutti della stessa grandezza, ed eliminiamo il quadrato centrale.

Ripetiamo questo processo all'infinito. La superficie risultante è zero, ma è racchiusa da una linea infinita.

7. Scomposizioni di sfere

L'intuizione ci dice che una sfera non può essere scomposta in due sfere disgiunte, ciascuna delle quali equivalente ad essa. Se questo fosse possibile, allora un'arancia potrebbe essere scomposta in tante arance il cui volume complessivo sarebbe maggiore di quello della Terra.

Al contrario, in base ad un risultato di Banach e Tarski, data una sfera, esistono due sfere disgiunte ciascuna delle quali è equivalente all'intera sfera per scomposizione finita. Quindi tale sfera può essere scomposta in un numero finito di parti che possono essere poi ricomposte in modo da formare due sfere ciascuna delle quali ha lo stesso volume di quella data, dove per scomposizione s'intende una partizione in insiemi due a due disgiunti, e per ricomposizione s'intende una riunione basata su movimenti rigidi (traslazioni e rotazioni).

8. Intuizione e certezza

Che cosa significano questi esempi, e i tanti altri che si potrebbero citare? Significano che l'intuizione ci fa sbagliare.

I sostenitori della concezione fondazionalista, pur non negandolo, evitano di trarne implicazioni negative per la loro concezione.

Così, Hahn afferma che tali esempi semplicemente richiedono «l'espulsione dell'intuizione dal ragionamento matematico e la formalizzazione completa della matematica. Cioè, ogni nuovo concetto matematico» deve «essere introdotto mediante una definizione puramente logica; ogni dimostrazione matematica» deve «essere effettuata con mezzi rigorosamente logici» (Hahn 1980, 93).

Dal canto suo Feferman, pur non arrivando ad affermare che gli esempi in questione richiedono l'espulsione dell'intuizione dalla matematica, sostiene che essi implicano che «l'intuizione non basta. Alla fine, innegabilmente, tutto dev'essere accuratamente definito e le proposizioni devono essere dimostrate» (Feferman 2000, 328). Cioè l'intuizione dev'essere sostituita da definizioni accurate e dimostrazioni rigorose.

Ma gli argomenti di Hahn e di Feferman si mordono la coda. Infatti, come si giustificano le definizioni accurate e le dimostrazioni rigorose? Secondo la concezione fondazionalista, esse si giustificano in ultima analisi facendo appello all'intuizione. Ma l'intuizione ci fa sbagliare.

Dunque se si sostiene, come la concezione fondazionalista, che la base della certezza della matematica sta nell'intuizione, è ingiustificato dire che la matematica è conoscenza assolutamente certa. Ma così viene meno il

presupposto stesso della concezione fondazionalista, e si vanifica la ragione per cui essa pone l'intuizione alla base della certezza della matematica.

13
La correttezza delle dimostrazioni

1. Gli errori nelle dimostrazioni

Un'altra ragione per cui la concezione fondazionalista è insostenibile è che, mentre essa dà per scontato che la matematica sia conoscenza assolutamente certa, l'esperienza matematica mostra che le dimostrazioni possono contenere errori che rimangono a lungo non scoperti e che non siamo mai sicuri di poter scoprire.

Questo vale sia per le dimostrazioni del passato sia per quelle attuali, che vengono pubblicate nella misura di circa duecentocinquantamila l'anno, e nella maggior parte dei casi sono controllate soltanto dall'autore e dai referee, e spesso neppure da loro.

Molte dimostrazioni fanno uso di risultati la cui dimostrazione non è stata accuratamente controllata dall'autore. Alcune fanno uso di calcoli o risultati ottenuti col computer che nessun matematico umano ha mai controllato né controllerà. Molte dimostrazioni sono incomplete, poiché contengono espressioni come 'si vede facilmente', 'un semplice argomento mostra', 'un breve calcolo permette di vedere', che si riferiscono a fatti che sembrano verosimili all'autore ma che generalmente egli non ha controllato. Spesso gli errori contenuti nelle dimostrazioni possono essere corretti senza pregiudizio dei risultati, ma in alcuni casi no. Alcuni errori rimangono nascosti per anni, altri possono non essere mai scoperti.

Questa caratteristica delle dimostrazioni è sottolineata già da Hume, secondo cui «in tutte le scienze dimostrative le regole sono certe e infallibili; ma quando le applichiamo, le nostre facoltà fallibili e incerte sono molto soggette ad allontanarsene, e cadono nell'errore» (Hume 1978, 180). Per questo motivo non vi è alcun matematico «che riponga completa fiducia in alcuna verità appena la scopre, e non la consideri invece altro che una semplice probabilità. La sua fiducia aumenta ogni volta che ne ripercorre le dimostrazioni; ma ancor più aumenta per l'approvazione degli amici; ed è

elevata alla massima perfezione dal consenso universale e dagli applausi del mondo scientifico»; ma «questo graduale aumento di fiducia non è altro che l'aggiunta di nuove probabilità» (*ibid.*).

Ora, l'aggiunta di nuove probabilità non porta mai alla certezza, perché certezza e probabilità «sono di natura così contraria e dissimile che non possono passare impercettibilmente dall'una all'altra, e questo perché esse non possono frazionarsi ma devono essere o completamente presenti o completamente assenti» (ivi, 181). Perciò, secondo Hume, ogni conoscenza matematica «si risolve in probabilità, e diventa in ultima analisi della stessa natura dell'evidenza di cui facciamo uso nella vita comune» (*ibid.*).

Per raggiungere la certezza dovremmo poter controllare la correttezza delle dimostrazioni in modo infallibile, perché «in ogni giudizio che possiamo formare intorno a una probabilità», qual è la dimostrazione, «dovremmo sempre correggere il primo giudizio, che deriva dalla natura dell'oggetto, mediante un altro giudizio» (ivi, 181-182). Per essere certi della correzione, questo secondo giudizio dovrebbe essere infallibile. Ma, secondo Hume, sebbene i giudizi degli uomini possano avere vari gradi di autorità a seconda della loro ragione e della loro esperienza, anche «nell'uomo di maggior senno e di più lunga esperienza questa autorità non è mai piena, perché anche un tal uomo dev'essere consapevole di molti errori nel passato, e deve temerne ancora altri per il futuro» (ivi, 182). Dunque il nuovo giudizio con cui verrebbe controllato il primo sarebbe soltanto «una nuova specie di probabilità per correggere e regolare la prima» (*ibid.*).

Perciò, secondo Hume, «in ogni probabilità, oltre all'incertezza originaria inerente al soggetto», nasce «una nuova incertezza derivante dalla debolezza di quella facoltà che giudica», e, mettendo insieme queste due incertezze, «noi siamo costretti dalla nostra ragione ad aggiungere un nuovo dubbio derivante dalla possibilità di errore nella valutazione che noi facciamo della verità e fedeltà delle nostre facoltà» (*ibid.*). Tale dubbio richiede di essere risolto, ma la sua soluzione, «essendo fondata soltanto sulla probabilità», anche se confermasse il nostro precedente giudizio, verrebbe ad «indebolire ancora di più la nostra prima evidenza», e a sua volta sarebbe «indebolita da un quarto dubbio dello stesso genere, e così via all'infinito» (*ibid.*). Dunque il controllo della correttezza delle dimostrazioni, invece di assicurarne la certezza, ne diminuirebbe la probabilità.

2. Il controllo della formalizzazione

Contro l'argomento di Hume si potrebbe obiettare che ogni dimostrazione matematica ordinaria può sempre essere codificata mediante una dimostrazione formale, colmando così le lacune contenute in essa, e in tal modo si può raggiungere l'assoluta certezza e infallibilità della dimostrazione.

È vero che le dimostrazioni formali sono costruite mediante regole la cui applicazione può essere soggetta ad errori, ma si può sempre controllare se ogni passo della dimostrazione è il risultato dell'applicazione corretta di una regola. Anzi, il controllo può essere effettuato meccanicamente, mediante un computer, senza che «si abbia bisogno di ricorrere all'intuizione o al significato», perché le dimostrazioni formali deducono i teoremi dagli assiomi mediante regole meccaniche, «senza invocare ulteriori condizioni, e dunque in base ad un puro gioco di formule» (Hilbert 1928, 79). Mentre le dimostrazioni informali, cioè le ordinarie dimostrazioni matematiche, sono 'per aria', astratte, e perciò la loro correttezza non è suscettibile di controllo in base a regole precise, le dimostrazioni formali sono 'per terra', concrete, si riferiscono ad atti palpabili, quindi la loro correttezza è suscettibile di controllo in base a regole precise. Dunque «non vi è alcun senso serio in cui tali dimostrazioni sono fallibili» (Worrall-Zahar 1976, 57).

Questa obiezione trascura però che il fatto che le dimostrazioni formali siano tali che si può sempre controllare mediante un computer se ogni passo della dimostrazione è il risultato dell'applicazione corretta di una regola, non assicura che tali dimostrazioni siano infallibili. Infatti il computer effettuerà il controllo in base ad un programma che, come tutti i programmi, può contenere bachi, e quindi non è infallibile ma solo probabile. Si pone perciò il problema di dimostrarne la correttezza. Ma quest'ultima verrà stabilita mediante una dimostrazione che a sua volta non sarà infallibile ma solo probabile, perciò si porrà il problema di controllarne la correttezza, e così via all'infinito, senza pervenire mai alla certezza ma anzi indebolendo la probabilità.

Inoltre, anche ammettendo che le dimostrazioni formali siano infallibili, questo non assicurerebbe che le dimostrazioni informali che esse codificano siano infallibili. Infatti, la correttezza della codificazione delle dimostrazioni informali mediante le dimostrazioni formali non può essere controllata meccanicamente, tanto meno in modo assolutamente certo e infallibile. Infatti, la codificazione non è un processo formale ma è un processo informale che richiede un'analisi del significato, e perciò è facilmente soggetto ad errori. Quindi essa non è assolutamente certa ma soltanto probabile. Per essere sicuri della correttezza della codificazione occorrerebbe dimostrarla, ma tale dimostrazione a sua volta non sarebbe assolutamente certa bensì solo probabile, e così via all'infinito. In questo modo di nuovo non si perviene mai alla certezza ma anzi si indebolisce la probabilità.

È perciò illusorio pensare di poter controllare la correttezza delle dimostrazioni informali attraverso la loro codificazione mediante dimostrazioni formali. In questo modo, alla probabilità della correttezza delle dimostrazioni informali subentra la probabilità della correttezza delle dimostrazioni formali e della codificazione, non la certezza. Il controllo della

correttezza delle dimostrazioni, informali o formali, ha solo una validità probabilistica e non fa differenza se è effettuato dall'uomo o da un computer.

3. Le dimostrazioni lunghe

Non soltanto la codificazione delle dimostrazioni informali mediante le dimostrazioni formali può dar luogo ad errori che non siamo mai sicuri di poter scoprire, ma le dimostrazioni lunghe, informali o formali, possono contenere errori che non siamo mai sicuri di poter scoprire.

Questo viene usato da Kitcher come argomento contro la concezione fondazionalista. Ad essa Kitcher contrappone «la preoccupazione circa le dimostrazioni lunghe. Esistono asserzioni matematiche standard *A* tali che la dimostrazione più breve di *A* richiederebbe anche ai matematici umani più dotati di spendere mesi di sforzo concentrato per seguirla» (Kitcher 1983, 40). Sembra innegabile che «chiunque abbia seguito una dimostrazione di *A* riterrebbe ragionevolmente di aver potuto commettere un errore» (*ibid.*). Infatti, «noi sappiamo di essere fallibili. Sappiamo che la nostra attenzione può cadere e che talvolta formuliamo male ciò che abbiamo dimostrato in precedenza. Perciò, quando arriviamo alla fine di una dimostrazione lunga, siamo ragionevolmente preoccupati che in essa possa essersi insinuato un errore» (ivi, 42).

In effetti «molti dei migliori matematici contemporanei sono preoccupati dal fatto che alcuni importanti teoremi, pubblicati negli ultimi due decenni, possano avere dimostrazioni contenenti errori che finora non sono stati rilevati» (ivi, 40). Questa preoccupazione non è soltanto una questione psicologica, al contrario, «l'osservazione psicologica che ci sentiamo incerti si spiega con l'osservazione epistemologica che per noi è ragionevole sentirci incerti» (ivi, 42). Infatti, anche ammettendo che qualche matematico voglia impegnarsi a controllare una dimostrazione molto lunga, «si deve subito ammettere che probabilmente tale attività sarebbe infestata da errori, e che sarebbe altamente irragionevole per il matematico scartare la possibilità di un errore» (*ibid.*). Ne dobbiamo «concludere che la nostra conoscenza di *A* è inevitabilmente incerta» (ivi, 40).

La preoccupazione di Kitcher circa le dimostrazioni lunghe estende ad esse quella di Hume circa i calcoli lunghi, secondo cui «nessuno vorrà sostenere che la nostra fiducia in un calcolo lungo vada oltre la probabilità» (Hume 1978, 181). Anche la nostra fiducia nelle dimostrazioni lunghe non può andare oltre la probabilità. Questo è riconosciuto da molti matematici, i quali affermano che «l'autenticità di una dimostrazione matematica non è assoluta ma soltanto probabilistica», e perciò «le dimostrazioni non possono essere troppo lunghe, altrimenti la loro probabilità diminuisce ed esse eludono il processo del controllo» (Davis 1972, 260). Un po' paradossalmente si potrebbe addirittura dire che «tutti i teoremi davvero

profondi sono falsi (o al più indimostrati o indimostrabili). Tutti i teoremi veri sono banali» (*ibid.*).

L'affermazione di Kitcher che esistono teoremi la cui dimostrazione più breve richiederebbero anche ai matematici umani più dotati mesi di sforzo concentrato per seguirle, può anche essere rafforzata. Infatti, per ogni n, esiste solo un numero finito di espressioni contenenti al massimo n caratteri, perciò esiste solo un numero finito di teoremi aventi una dimostrazione di lunghezza al massimo n. Dunque, per ogni n, esistono infiniti teoremi la cui dimostrazione più breve ha lunghezza maggiore di n. Poiché anche i matematici umani più dotati possono leggere solo un numero finito di parole al minuto e la vita umana è finita, se ne deve concludere che esistono infiniti teoremi la cui dimostrazione più breve è di lunghezza tale che la sua correttezza non potrà mai essere controllata da alcun matematico umano. Questo significa che, se la dimostrazione contiene degli errori, non possiamo mai essere sicuri di scoprirli.

Si potrebbe obiettare che l'esistenza di teoremi del genere è soltanto un'eventualità teorica, che non si applica ai teoremi della matematica ordinaria. Ma esempi di teoremi aventi dimostrazioni così lunghe che non possiamo mai essere sicuri che in esse non si sia insinuato alcun errore si trovano effettivamente nella matematica ordinaria. È vero che spesso quest'ultima occulta il problema delle dimostrazioni lunghe omettendo molti dettagli delle dimostrazioni che, se introdotti, porterebbero ad un enorme aumento nella lunghezza delle dimostrazioni. Ma neppure con questo trucco essa riesce ad evitare il problema delle dimostrazioni lunghe.

Per esempio, le dimostrazioni delle due congetture di Burnside sui gruppi finiti occupano circa cinquecento pagine ciascuna. Una dimostrazione completa della congettura di Ramanujan ottenuta assumendo solo la teoria degli insiemi e l'analisi elementare richiederebbe presumibilmente circa duemila pagine. La dimostrazione del teorema della classificazione dei gruppi finiti semplici, frutto degli sforzi di molti matematici lungo l'arco di molti anni, è disseminata in circa cinquecento articoli per un totale di circa quindicimila pagine. Dimostrazioni formali corrispondenti a queste dimostrazioni informali avrebbero una lunghezza enormemente maggiore. Perciò quello delle dimostrazioni lunghe non è un problema artificioso, ma è una questione che si incontra nell'esperienza matematica ordinaria e con cui i matematici devono fare i conti.

Si potrebbe anche obiettare che, è vero che «le dimostrazioni lunghe disturbano molti matematici. Da un lato, man mano che cresce la lunghezza della dimostrazione, cresce anche la possibilità di errore. La probabilità di un errore nella dimostrazione del teorema della classificazione è virtualmente uno. Dall'altro lato, la probabilità che ogni singolo errore non possa essere facilmente corretto è virtualmente zero, e poiché la dimostrazione è finita, la probabilità che il teorema sia scorretto è vicina allo zero. Mano a mano che

passa il tempo e abbiamo la possibilità di assimilare la dimostrazione, quel livello di fiducia può solo aumentare» (Aschbacher 1980-81, 64).

Questo argomento, però, trascura che, anche ammettendo che la probabilità che ogni singolo errore non possa essere facilmente corretto sia virtualmente zero, ad ogni passo della dimostrazione la nostra attenzione può cadere e possiamo formulare male ciò che avevamo dimostrato in precedenza, sicché al termine di una dimostrazione lunga la probabilità che essa contenga qualche errore è tutt'altro che vicina allo zero.

Dati i limiti del controllo delle dimostrazioni lunghe, non si può sperare di giustificare la validità dei risultati stabiliti da tali dimostrazioni mediante il controllo. Se, in base ad una certa evidenza indiretta, sorgono dubbi su un risultato matematico che richiede una dimostrazione lunga, sarebbe arrogante e testardo affermare che quel risultato è valido perché, controllandone passo per passo la dimostrazione, non si riesce a trovarvi alcun errore. Del resto, l'esperienza matematica mostra che spesso ci convinciamo della validità di un risultato non controllandone passo per passo la dimostrazione, ma in base ad altri criteri, per esempio, considerando in che misura tale risultato corrisponde alle aspettative generali, oppure considerando se la dimostrazione segue una strategia simile a quella già adottata per altri risultati, oppure esaminando alcuni punti della dimostrazione che sembrano critici, o addirittura basandoci sulla reputazione dell'autore.

Che non si possa sperare di giustificare la validità dei risultati stabiliti da dimostrazioni lunghe mediante il controllo, mostra il carattere puramente ideologico dell'assunzione di Hilbert che la matematica finitaria sia assolutamente certa. Anche quando una dimostrazione di una proposizione reale nella matematica infinitaria può essere sostituita da una dimostrazione della stessa proposizione nella matematica finitaria, in generale quest'ultima è molto più lunga della dimostrazione originaria, e quindi, da un punto di vista reale, non-ideologico, c'è una possibilità molto concreta che essa contenga errori. In generale è quasi caratteristico della matematica finitaria che i suoi teoremi richiedano dimostrazioni molto lunghe. Dunque, da un punto di vista reale, non-ideologico, la matematica finitaria è tutt'altro che assolutamente certa.

4. Le dimostrazioni con l'aiuto del computer

Il problema delle dimostrazioni lunghe si pone in particolare per le dimostrazioni con l'aiuto del computer, come la dimostrazione di Appel e Haken del teorema dei quattro colori o la dimostrazione di Lam, Thiel e Swiercz della non-esistenza di piani finiti proiettivi di ordine 10. In tutte queste dimostrazioni le elaborazioni del computer fanno parte integrante della dimostrazione. Dati i limiti di affidabilità della correttezza dei programmi, la conoscenza ottenuta mediante l'uso del computer non può dirsi assolutamente certa.

Come osserva Lam, le dimostrazioni con l'aiuto del computer pongono «una nuova sfida al sistema del referaggio. Normalmente ci si aspetta che un referee controlli la correttezza delle dimostrazioni. Ma come può un referee controllare una dimostrazione che 'nessuno può controllare'? Ci si aspetta che scriva un programma per controllare i risultati? E se il programma richiede un sacco di tempo-computer, come nel caso della ricerca di un piano proiettivo finito di ordine 10? Questo è pretendere troppo dai referee» (Lam 1990, 12). Perciò «è meglio trattare le dimostrazioni basate sul computer come gli scienziati in altre discipline trattano i risultati sperimentali. In aggiunta ai risultati, l'autore dell'articolo dovrebbe includere una descrizione della metodologia, un'analisi dei risultati e una descrizione di come i risultati rientrano nella teoria nota. Il referee può controllare se la metodologia è corretta e se l'autore si è preoccupato di assicurare la correttezza del risultato computato. In ultima analisi, il referee deve giudicare se i risultati sono interessanti e credibili» (*ibid*.).

Ma usare il criterio della credibilità ha come conseguenza che «talora si pubblicano risultati sbagliati. Gli scienziati di altre discipline hanno una tecnica standard per affrontare questo problema. Essi valorizzano l'importanza di verifiche indipendenti dei risultati sperimentali», e questa è una pratica da incoraggiare perché, «in un certo senso, la verifica completa la dimostrazione» (*ibid*.). Ma in questo modo non si raggiunge la certezza assoluta. Infatti, «'la conoscenza scientifica è un corpo di asserzioni di vari gradi di certezza: alcune molto incerte, alcune quasi certe, ma nessuna assolutamente certa'. Come i fisici hanno imparato a vivere con l'incertezza, così noi dobbiamo imparare a vivere con una dimostrazione 'incerta'» (*ibid*.).

14
I difetti del riduzionismo

1. Il riduzionismo assiomatico

Un'altra ragione per cui la concezione fondazionalista è insostenibile è che essa propone un'immagine riduzionista della matematica. Secondo tale concezione, infatti, tutte le teorie matematiche non solo sono teorie assiomatiche, ma sono riducibili ad un'unica teoria assiomatica. Per esempio, esse sono riducibili alla teoria degli insiemi ZFC di Zermelo-Fraenkel più l'assioma di scelta. Dunque il riduzionismo della concezione fondazionalista è un riduzionismo assiomatico.

La riducibilità di tutte le teorie matematiche a ZFC va intesa nel senso che, data una qualsiasi teoria matematica, si possono definire tutti i suoi termini a partire dai termini primitivi di ZFC, e si possono dimostrare tutti i suoi teoremi a partire dagli assiomi di ZFC. Cioè ZFC «fornisce una cornice all'interno della quale si possono definire tutti gli oggetti matematici classici e tutte le strutture matematiche classiche, e si possono dimostrare tutti i teoremi matematici classici» (Maddy 2000, 344).

Il riduzionismo assiomatico si fonda su alcuni sviluppi della matematica dell'Ottocento che hanno posto la basi per la riduzione di tutte le teorie matematiche a ZFC. Per ottenere tale riduzione si parte dai numeri cardinali finiti, e da essi si costruiscono i numeri naturali, gli interi, i numeri razionali come coppie di interi, i numeri reali come sezioni di Dedekind dei razionali, e così via. Per i sostenitori del riduzionismo assiomatico questo significa che «esistono surrogati insiemistici e rappresentazioni insiemistiche di tutti gli oggetti matematici e di tutte le strutture matematiche, e le versioni insiemistiche di tutti i teoremi matematici classici possono essere dimostrate a partire dagli assiomi standard della teoria degli insiemi (ZFC)» (Maddy 1997, 34).

I sostenitori del riduzionismo assiomatico ammettono che il matematico «medio perde poco tempo con la teoria degli insiemi» (Maddy 1992, 4). Essi riconoscono che è innegabile che i matematici nelle varie branche della disciplina «hanno modi caratteristici di pensiero differenti, e che la disciplina verrebbe mutilata se si limitasse in qualche modo questa varietà» (Maddy 1997, 33). Perciò, «dire che tutti gli oggetti di studio matematico hanno surrogati insiemistici non equivale a dire che essi devono essere studiati usando solo metodi insiemistici» (ivi, 34). Si può essere riduzionisti senza affermare che «tutti i metodi legittimi sono inclusi tra i metodi usuali della teoria degli insiemi» (*ibid.*).

Ma, per i sostenitori del riduzionismo assiomatico, «questa indipendenza metodologica delle varie branche della matematica dalla teoria degli insiemi non significa che devono esistere oggetti matematici diversi dagli insiemi, più di quanto l'indipendenza metodologica della psicologia o della chimica dalla fisica significhi che devono esistere menti non fisiche o chemistoni» (Maddy 1992, 5).

Inoltre, il fatto che il matematico medio nelle varie branche della matematica perde poco tempo con la teoria degli insiemi, «non significa che la teoria degli insiemi non ha alcuna rilevanza pratica per queste discipline» (ivi, 4). Infatti, la riduzione a ZFC presenta alcuni vantaggi.

In primo luogo, fornendo un surrogato insiemistico di tutti gli oggetti matematici, essa trasporta tali oggetti «in un'unica arena (l'universo degli insiemi) che permette alle relazioni e alle interazioni tra essi di essere chiaramente mostrate e indagate» (Maddy 1997, 26). In tal modo si ottiene una profonda unificazione della matematica.

In secondo luogo, «quest'unica arena unificata per la matematica fornisce una corte di appello finale per le questioni di esistenza e di dimostrazione matematica: se si vuol sapere se esiste un oggetto matematico di un certo genere, ci si chiede (in ultima analisi) se esiste un surrogato insiemistico di quel genere; se si vuol sapere se una data asserzione è dimostrabile o refutabile, si intende (in ultima analisi), dimostrabile o refutabile a partire dagli assiomi della teoria degli insiemi» (*ibid.*).

In terzo luogo, «quando i matematici di un campo al di fuori della teoria degli insiemi sono insolitamente frustrati da qualche problema aperto recalcitrante» e «nasce la questione se la sua soluzione possa richiedere qualche assunzione forte finora non familiare in quel campo», essi «ripiegano sull'idea che gli oggetti del loro studio sono in ultima analisi insiemi e si chiedono, nella teoria degli insiemi, se possano essere rilevanti assiomi o principi più esoterici» (Maddy 1992, 4). Potrebbe darsi che quel particolare problema aperto sia insolubile rispetto agli assiomi di ZFC, e che «si debbano invocare assunzioni insiemistiche completamente nuove» (*ibid.*).

Nonostante le sue apparenti attrattive, però, il riduzionismo assiomatico ha alcuni limiti che lo rendono insostenibile.

1) È confutato dal primo teorema di incompletezza di Gödel in base al quale, per ogni sistema formale appropriato per la teoria degli insiemi, esiste una proposizione vera dell'aritmetica che non è dimostrabile in esso. Dunque l'aritmetica non è riducibile alla teoria degli insiemi.

2) È puramente ideologico perché, per la maggior parte dei matematici, il fatto che gli oggetti matematici siano riducibili agli insiemi non fa differenza in pratica. Per esempio, sebbene i matematici sappiano che i numeri reali sono riducibili a sezioni di Dedekind dei razionali, essi continuano a trattarli come punti del continuo geometrico, non li costruiscono insiemisticamente ma li descrivono come campi ordinati completi.

3) Trascura che la riduzione degli oggetti matematici agli insiemi trasforma problemi importanti su certi oggetti matematici in problemi artificiali sugli insiemi, che possono risultare banali o vuoti. La riduzione agli insiemi può portare ad un radicale impoverimento o deterioramento di un settore della matematica.

4) Contraddice l'esperienza matematica quando afferma che la riduzione degli oggetti matematici agli insiemi permette alle relazioni e alle interazioni tra tali oggetti di essere chiaramente mostrate e indagate. Al contrario, in molti casi la riduzione impedisce di vedere alcune relazioni e interazioni tra gli oggetti matematici.

5) Contraddice l'esperienza matematica quando afferma che la soluzione di qualche problema aperto recalcitrante potrebbe richiedere assunzioni insiemistiche completamente nuove. Al contrario, nessun problema aperto importante è stato risolto in questo modo, a cominciare dall'ultimo teorema di Fermat, che era considerato un tipico candidato al riguardo.

6) Non ci dice quali oggetti matematici costruire a partire dagli insiemi. Da essi si potrebbero costruire molti tipi di oggetti, ma di fatto se ne costruiscono soltanto alcuni, che assumono un ruolo dominante, e il riduzionismo assiomatico non spiega perché si debbano costruire tali oggetti invece di altri.

7) Non fornisce surrogati univoci di tutti gli oggetti matematici, per esempio, non propone un'identificazione univoca dei numeri naturali con gli insiemi. Per esempio, Zermelo identifica un numero naturale con l'insieme consistente del suo predecessore immediato, dunque identifica 0 con $\varnothing$, 1 con $\{\varnothing\}$, 2 con $\{\{\varnothing\}\}$, 3 con $\{\{\{\varnothing\}\}\}$, … . Invece von Neumann identifica un numero naturale con l'insieme di tutti i suoi predecessori immediati, quindi identifica 0 con $\varnothing$, 1 con $\{\varnothing\}$, 2 con $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, 3 con $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, … . E si potrebbero proporre molte altre, anzi infinite altre identificazioni dei numeri naturali con insiemi. Come riconoscono gli stessi sostenitori del riduzionismo assiomatico, vi possono essere «ragioni tecniche per preferire un'identificazione ad un'altra, ma non vi è alcuna ragione abbastanza profonda per giustificare l'argomento metafisico che un'identificazione

piuttosto che un'altra disvela la vera identità dei numeri naturali. Anche le altre identificazioni, degli interi, dei razionali, dei reali, delle funzioni, ecc., sono soggette a questo tipo di arbitrarietà» (Maddy 1997, 24).

8) Trascura che la riduzione degli oggetti matematici agli insiemi conferisce loro nuove proprietà che non ci illuminano sulla loro natura. Per esempio, l'identificazione di Zermelo di 1 con $\{\varnothing\}$ e di 3 con $\{\{\{\varnothing\}\}\}$ conferisce ai numeri 1 e 3 la proprietà $1 \notin 3$, ma questo non ci dice nulla sulla natura di tali numeri.

9) Trascura che la riduzione degli oggetti matematici agli insiemi conferisce loro nuove proprietà che possono essere contraddittorie tra loro. Per esempio, in base all'identificazione di Zermelo di 1 con $\{\varnothing\}$ e di 3 con $\{\{\{\varnothing\}\}\}$, si ha $1 \notin 3$. Invece, in base all'identificazione di von Neumann di 1 con $\{\varnothing\}$ e di 3 con $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, si ha $1 \in 3$.

Per uscire da questa difficoltà, il riduzionismo assiomatico propone di considerare non i singoli oggetti, ma il sistema, o meglio la struttura, che essi costituiscono, «concentrandosi sulle relazioni tra gli oggetti, e ignorando tutte le loro proprietà che non riguardano il modo in cui essi stanno in relazione con gli altri oggetti del sistema» (Shapiro 1989, 146). Considerando la struttura di Zermelo $\varnothing$, $\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}$, … e la struttura di von Neumann $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, … la difficoltà scompare, perché queste due strutture sono essenzialmente la stessa struttura.

Ma questa proposta appare inadeguata perché, quando si identificano i numeri naturali con certi insiemi, la relazione di appartenenza sussiste o non sussiste tra ogni coppia di tali insiemi. Essa, quindi, mette in relazione ciascuno di tali insiemi con tutti gli altri. Ma allora la relazione di appartenenza riguarda il modo in cui tali insiemi stanno in relazione con tutti gli altri, e perciò, in base alla proposta dal riduzionismo assiomatico, non può essere ignorata. Ora, la relazione di appartenenza è differente nella struttura di Zermelo e in quella di von Neumann, perché nella prima si ha $1 \notin 3$ mentre nella seconda si ha $1 \in 3$. Dunque le due strutture non sono essenzialmente la stessa struttura ma sono differenti.

10) Chiude gli oggetti matematici in sé stessi, sottraendoli alle interazioni con gli altri. Ma gli oggetti matematici vengono introdotti per risolvere particolari problemi, e per risolverli vengono messi in relazione con altri oggetti. Essi, quindi, non sono chiusi in se stessi ma sono aperti alle interazioni con altri oggetti. Ogni interazione mostra gli oggetti matematici in una nuova luce e li apre a nuovi sviluppi. Il riduzionismo assiomatico, invece, stacca gli oggetti matematici dallo scopo per cui sono stati introdotti in origine, li sottrae alle interazioni con gli altri oggetti matematici e così li rende forme vuote.

11) Trascura che i progressi più importanti della matematica non consistono nella riduzione degli oggetti matematici ad un unico tipo di oggetti, ma nell'introduzione di nuovi concetti matematici e di nuove ipotesi.

Ciò è sottolineato già da Dedekind che, a commento della tesi di Dirichlet secondo cui «ogni teorema di algebra e di analisi superiore, per quanto remoto, si può esprimere come un teorema sui numeri naturali», afferma che non si deve considerare «affatto un'opera meritoria, e anche Dirichlet era ben lontano dal farlo, intraprendere effettivamente una tale faticosa opera di riduzione e non voler ammettere e usare altro che i numeri naturali. Al contrario, i progressi più grandi e fecondi nella matematica e nelle altre scienze sono dovuti prevalentemente alla creazione e all'introduzione di nuovi concetti, rese necessarie dalla frequente ricomparsa di fenomeni complessi, difficilmente dominabili per mezzo dei vecchi concetti» (Dedekind 1930-32, III, 338).

12) Trascura che importanti aree dell'attività matematica non si prestano ad essere formulate come teorie assiomatiche, ma esistono piuttosto come collezioni di problemi risolti e irrisolti su certi tipi di oggetti matematici. E tuttavia, come sottolinea Grosholz, «esse possono arrivare a stare in relazioni significative con altre aree dell'attività matematica che contribuiscono alla crescita della conoscenza matematica» (Grosholz 2000, 82).

Tali relazioni non hanno la forma di una riduzione insiemistica. La derivazione delle ipotesi di una teoria da quelle di un'altra teoria può essere di tipo non-deduttivo, e le definizioni dei concetti di una teoria in termini di quelli di un'altra teoria «possono essere altamente non banali, e possono richiedere una ridefinizione del vocabolario di entrambe le teorie o anche una conferma autonoma» (*ibid.*). Tali derivazioni non-deduttive e definizioni non banali «possono essere in sé veicoli potenti non per dare dei fondamenti alla matematica», ma «per risolvere problemi e per costruire nuovi oggetti. La visione di una matematica unificata» attraverso la riduzione «appare dunque non solo di fatto irrealizzabile, ma addirittura fuorviante come ideale regolativo» (*ibid.*).

2. L'antiriduzionismo assiomatico

Un'alternativa al riduzionismo assiomatico è data dall'antiriduzionismo assiomatico, secondo cui tutte le teorie matematiche sono sì teorie assiomatiche, ma non sono riducibili ad un'altra teoria assiomatica, né tanto meno ad un'unica teoria assiomatica.

L'antiriduzionismo assiomatico risale ad Aristotele, che lo basa sulla teoria dei generi. Secondo Aristotele, ogni teoria matematica tratta di un unico genere, in quanto «ogni singola scienza è la scienza di un singolo genere, cioè riguarda tutti gli oggetti che risultano composti dagli elementi

primi del genere, e sono parti del genere oppure affezioni per sé di tali parti» (Aristotele, *Analytica Posteriora*, A 28, 87 a 38-39). Per esempio, la geometria riguarda i punti, le linee, le figure piane e le figure solide, mentre l'aritmetica riguarda i numeri. I generi non sono aggregati arbitrari di oggetti eterogenei ma sono aggregati naturali di oggetti dello stesso tipo.

Oggetti di tipo differente appartengono a generi differenti, e generi differenti sono trattati da scienze differenti. Per esempio, l'aritmetica e la teoria della musica sono differenti perché «il genere sottostante è differente» (ivi, A 9, 76 a 12). I generi sono quindi separati tra loro e servono come principi di individuazione delle teorie matematiche. Due teorie matematiche sono differenti se e solo se trattano generi differenti. Due proposizioni appartengono ad una stessa teoria matematica se e solo se i termini che compaiono in esse sono dello stesso genere.

Teorie matematiche differenti devono avere principi propri differenti, perché i principi relativi ad un dato genere non possono essere usati per dimostrare proposizioni di un altro genere. Infatti, «occorre che le proposizioni indimostrabili siano contenute nello stesso genere in cui rientrano le proposizioni dimostrate» (ivi, A 28, 87 b 42-43). Gli unici principi che due teorie matematiche differenti possono avere in comune sono i principi comuni, ossia i principi logici, che non riguardano alcun genere particolare.

Poiché i principi relativi ad un dato genere non possono essere usati per dimostrare proposizioni di un altro genere, «non si potrà mai dimostrare una proposizione di una data scienza mediante un'altra scienza» (ivi, A 7, 75 b 14). Ciò comporterebbe il trasferimento della dimostrazione da una scienza ad un'altra, mentre, «affinché la dimostrazione sia trasferibile, occorrerà che il genere sia lo stesso, o assolutamente o almeno secondo un certo punto di vista. Altrimenti, è chiaro che questo è impossibile» (ivi, A 7, 75 b 7-8). Per esempio, non si può dimostrare una proposizione aritmetica per mezzo della geometria, in particolare «non si può dimostrare per mezzo di essa che il prodotto di due numeri cubici è un numero cubico» (ivi, A 7, 75 b 13-14). E viceversa «non si può dimostrare una proposizione geometrica per mezzo dell'aritmetica» (ivi, A 7, 75 a 38-39).

Una dimostrazione «ha sempre il genere intorno al quale verte la dimostrazione» (ivi, A 7, 75 b 7-8). Tutti i termini che compaiono nelle sue premesse e nella sua conclusione devono appartenere allo stesso genere, perché la dimostrazione è il sillogismo scientifico, ed è «necessario che gli estremi e i medi dei sillogismi scientifici vengano attinti da un medesimo genere» (ivi, A 7, 75 b 10-11). La dimostrazione non può avere una conclusione i cui termini appartengono al genere di un'altra teoria matematica, altrimenti la conclusione sarebbe dimostrata passando da un genere ad un altro, mentre «non è possibile dimostrare un certo fatto passando da un genere ad un altro» (ivi, A 7, 75 a 38).

Poiché non si può dimostrare una proposizione aritmetica per mezzo della geometria, non si può ridurre l'aritmetica alla geometria, altrimenti si potrebbero dimostrare tutte le proposizioni aritmetiche mediante la geometria. Parimenti, poiché non si può dimostrare una proposizione geometrica per mezzo dell'aritmetica, non si può ridurre la geometria all'aritmetica, altrimenti si potrebbero dimostrare tutte le proposizioni geometriche mediante l'aritmetica. In generale non si può ridurre una teoria assiomatica ad un'altra.

Tanto meno si possono ridurre tutte le teorie matematiche ad un'unica teoria assiomatica. Se ciò fosse possibile, in quell'unica teoria assiomatica si potrebbero dimostrare i principi di tutte le teorie matematiche, e quindi i principi propri di ogni cosa, mentre «non è possibile dimostrare i principi propri di ogni cosa», perché i principi su cui dovrebbero basarsi tali dimostrazioni «sarebbero principi di tutto, e la scienza riguardante tali principi dominerebbe tutte le altre» (ivi, A 9, 76 a 17-18).

I principi di questa scienza superiore sarebbero i principi di ogni genere, e quindi vi sarebbero dimostrazioni applicabili ad ogni genere. Ma questo è impossibile perché, come si è detto, ogni dimostrazione riguarda un dato genere e «non si adatta ad un genere differente» (ivi, A 9, 76 a 22-23). Inoltre, tutte le dimostrazioni si baserebbero su un unico insieme di principi, mentre «non tutte le deduzioni vere in realtà hanno gli stessi principi, dal momento che i principi di molte deduzioni vere sono differenti quanto al genere e non si accordano tra loro. Per esempio, le unità non si accordano con i punti, perché le prime sono prive di posizione mentre questi ultimi hanno una posizione» (ivi, A 32, 88 a 31-34).

Si potrebbero ridurre tutte le teorie matematiche ad un'unica teoria assiomatica soltanto se questa avesse solo principi comuni. Ma una teoria matematica avente solo principi comuni non può esistere. Infatti, «non possono esserci principi comuni da cui si possano dimostrare tutte le cose», perché «i generi delle cose sono differenti e alcuni principi appartengono alle quantità, altri alle qualità» (ivi, A 32, 88 a 36-88 b 3). Inoltre le dimostrazioni relative a tali cose, anche se si basano su principi comuni, devono usare fatti relativi alle quantità o alle qualità, cioè fatti relativi al genere della teoria matematica considerata, e quindi non possono basarsi solo sui principi comuni.

L'antiriduzionismo assiomatico non offre, però, una valida alternativa al riduzionismo assiomatico. Anch'esso, infatti, ha alcuni limiti che lo rendono insostenibile.

1) È confutato dal primo teorema di incompletezza di Gödel, in base al quale in generale non si possono dimostrare tutte le proposizioni vere di un dato genere mediante i principi di quel genere, ma per dimostrarle si deve ricorrere ai principi di un altro genere. Per esempio, in virtù di tale risultato, «esistono proposizioni aritmetiche che possono essere dimostrate solo con metodi analitici» (Gödel 1986- , III, 48).

2) È in conflitto con l'esperienza matematica, la quale mostra che di fatto molte proposizioni matematiche relative ad un dato genere vengono dimostrate usando principi relativi ad un altro genere. Per esempio, nella geometria analitica, si dimostrano teoremi geometrici usando metodi algebrici. E la dimostrazione di Wiles dell'ultimo teorema di Fermat stabilisce una proposizione dell'aritmetica ricorrendo alla geometria delle curve ellittiche.

3) Si scontra col fatto che se, nel dimostrare una proposizione matematica relativa ad un dato genere, usiamo principi relativi ad un altro genere, possiamo ottenere una dimostrazione molto più semplice e breve. Per esempio, Boolos ha dato un esempio di un sistema formale *S* e di un enunciato *A* tali che *A* è dimostrabile in *S* in linea di principio ma non in pratica, cioè con una dimostrazione che possa «essere scritta in tutti i dettagli in questo universo» (Boolos 1998, 377). L'enunciato *A* diventa dimostrabile in pratica, invece, se si ricorre a principi estranei ad *S*, relativi ad oggetti di altro genere. Essi permettono di trovare una dimostrazione di *A* «ogni cui simbolo può essere scritto facilmente» (ivi, 376).

Per superare i limiti del riduzionismo assiomatico non basta dunque l'antiriduzionismo assiomatico, occorre un antiriduzionismo di tipo differente. Per non entrare in conflitto col primo teorema di incompletezza di Gödel, esso non deve identificare il metodo della matematica col metodo assiomatico. Quindi deve rinunciare all'assunzione del mondo chiuso che le teorie matematiche sono sistemi chiusi, e deve sostituirla con un'assunzione di tipo essenzialmente differente.

15
I limiti della concezione astratta

1. Difetti della concezione astratta

Un'altra ragione per cui la concezione fondazionalista è insostenibile è che essa, quale formulata da Hilbert, adotta la concezione astratta del metodo assiomatico. Quest'ultima ha alcuni difetti intrinseci.

1) Non rende conto di vasti campi della matematica. Infatti, ammettendo che i termini primitivi possano avere più interpretazioni e che le proposizioni primitive possano essere vere rispetto a più interpretazioni, essa riduce la matematica allo studio delle interpretazioni. Ma queste sono costituite da strutture astratte, cioè da «insiemi di elementi la cui natura non è specificata», su cui «si danno una o più relazioni in cui intervengono tali elementi» (Bourbaki 1962, 40). Perciò la matematica diventa lo studio «di forme astratte, le strutture matematiche» (ivi, 46). Ma ciò contrasta col fatto che vasti campi della matematica, dal calcolo numerico alla matematica applicata, non possono considerarsi lo studio di strutture astratte.

2) Apre la strada allo sviluppo anarchico e incontrollato della ricerca. Infatti, permettendo di considerare assiomi arbitrari con l'unico vincolo della coerenza, essa non consente di discriminare tra le teorie in base alla loro significatività. Come riconosce lo stesso Bourbaki, ciò ha favorito la creazione di «strutture teratologiche, totalmente prive di applicazioni, il cui unico merito era quello di mostrare l'esatta portata di ogni assioma, osservando che cosa accadeva quando lo si sopprimeva o lo si modificava», e ha suggerito che questi fossero «gli unici prodotti che ci si poteva aspettare dal metodo» (*ibid.*).

3) Porta all'industrializzazione della ricerca. Essa, infatti, anche quando svolge un ruolo positivo nel formulare assiomi utili per la soluzione di problemi significativi, tende a degenerare. Prima qualcuno mostra che un assioma può essere riformulato in modo più semplice. Poi qualcun altro fa vedere che, con una formulazione un po' più complicata, cinque assiomi

possono essere ridotti a quattro. Poi qualcun altro ancora mostra che, usando altri termini primitivi e introducendo nuovi assiomi, si potrebbero dimostrare gli stessi teoremi. In questo modo non si fa avanzare significativamente la ricerca matematica, si fa solo industria, si fabbricano prodotti di consumo, con una tendenza alla sovrapproduzione di articoli di basso costo e di mediocre fattura.

4) Porta alla sclerotizzazzione della ricerca. Ciò si può vedere adattando un argomento di Frege. Come «l'albero, nei punti in cui vive e cresce, dev'essere morbido e succoso» (Frege 1976, 59), così la matematica, nei punti in cui vive e cresce, deve svilupparsi con i metodi morbidi e succosi, ossia flessibili e fecondi, della matematica ordinaria. E come nell'albero, «quando tutte le parti verdi si sono lignificate, la crescita cessa» (*ibid.*), così nella matematica, quando le sue costruzioni sono state ripulite col metodo assiomatico, la crescita cessa. Alla lignificazione dell'albero, che segna la fine della sua crescita, corrisponde la sclerotizzazione della ricerca prodotta dal metodo assiomatico, che ne segna la perdita di flessibilità e di fecondità.

5) Porta alla frammentazione della matematica. Infatti, permettendo di considerare assiomi arbitrari con l'unico vincolo della coerenza, essa produce una proliferazione incontrollata di teorie. Ci può chiedere «se questa proliferazione esuberante è lo sviluppo di un organismo vigorosamente costituito, che acquista ogni giorno maggior coesione e unità dagli accrescimenti che esso riceve, o se al contrario essa è solo il segno esteriore di una tendenza ad uno sbriciolamento sempre più spinto, dovuto alla natura stessa della matematica, e se quest'ultima è avviata a diventare una torre di Babele di discipline autonome, isolate le une dalle altre, tanto nei loro fini quanto nei loro metodi e persino nel loro linguaggio» (Bourbaki 1962, 36). In breve, ci si può chiedere se «oggi esiste una matematica oppure esistono più matematiche» (*ibid.*).

Bourbaki propende per la prima soluzione ma, data la proliferazione incontrollata di teorie prodotta dalla concezione astratta, sembra più plausibile la seconda. Naturalmente non ci sarebbe nulla di male se, nella frammentazione della matematica, ciascun frammento fosse significativo, cioè servisse a risolvere problemi importanti e desse risultati dotati di applicazioni importanti. Ma spesso la frammentazione non risponde a finalità scientifiche bensì solo di carriera, di prestigio accademico o di finanziamenti.

6) Porta alla parcellizzazione della ricerca. Essa, infatti, incoraggia il matematico a ritagliarsi un piccolo spazio in cui lavorare, perdendo di vista lo scopo finale, o forse senza neppure averne uno. Ciò è ammesso dallo stesso Bourbaki, il quale riconosce che molti matematici «si ritirano in un cantuccio della matematica da cui non cercano di uscire, e non solo ignorano quasi completamente tutto ciò che non riguarda il loro argomento, ma addirittura non sarebbero in grado di comprendere il linguaggio e la terminologia impiegata dai loro colleghi che si richiamano ad una specialità lontana dalla loro» (ivi, 35).

La giustificazione che ne dà Bourbaki è che «non c'è nessuno, neppure tra coloro di più vasta cultura, che non si senta spaesato in certe regioni dell'immenso mondo matematico» (*ibid.*). Ma un conto è l'impossibilità di essere onniscienti e un altro è rifugiarsi in ricerche insignificanti. Certo, è nella natura della matematica occuparsi di una grande quantità di problemi variegati, ma questo non ha nulla a che fare con la parcellizzazione. Che la matematica presenti una grande varietà di problemi significativi è segno di ricchezza. Ma che i matematici si dedichino a risolvere una congerie di problemi insignificanti solo per scopi di carriera, di prestigio accademico o di finanziamenti è segno di miseria.

7) Porta alla banalizzazione della ricerca. Essa, infatti, riduce la ricerca matematica a quella di teoremi dimostrabili a partire da assiomi scelti arbitrariamente, e vi sono semplici procedimenti meccanici, come l'algoritmo del British Museum, che permettono di generare meccanicamente tutte le dimostrazioni e quindi tutti i teoremi dimostrabili a partire da tali assiomi. Ma la razionalità dell'algoritmo del British Museum è simile a quella di un ipotetico utente di una biblioteca che, per trovare nello schedario la collocazione delle opere di Zabarella, esaminasse prima tutti gli autori che cominciano per A, poi tutti gli autori che cominciano per B, e così via. Si tratta, cioè, di una razionalità priva di intelligenza.

8) Porta a negare alla matematica ogni valore conoscitivo. In base ad essa, infatti, costruire una teoria matematica vuol dire scegliere arbitrariamente un certo numero di assiomi e dedurre teoremi da essi mediante inferenze logiche. Ma assiomi scelti arbitrariamente difficilmente possono considerarsi conoscenza, perciò neppure i teoremi dedotti da essi mediante inferenze logiche possono considerarsi conoscenza. Infatti, se tali inferenze logiche sono corrette, i teoremi non possono contenere alcuna conoscenza essenzialmente nuova rispetto agli assiomi. Dunque, in base alla concezione astratta, le teorie matematiche non danno conoscenza.

9) Porta all'oscurità della matematica. Come riconosce Rota, «da nessuna parte nelle scienze si trova un divario così grande come quello tra la versione scritta di un risultato matematico e il discorso che è necessario per comprendere quel risultato. Il metodo assiomatico di presentazione della matematica ha raggiunto nel nostro tempo un vertice di fanatismo. Un pezzo di matematica scritta non può essere compreso e apprezzato senza uno strenuo sforzo supplementare. La chiarezza è stata sacrificata a parole d'ordine quali la coerenza della notazione, la brevità dell'argomentazione e la linearità forzata del ragionamento inferenziale. Alcuni matematici arrivano a pretendere che la matematica è il metodo assiomatico, né più né meno. Tale pretesa di 'identificare' la matematica con uno stile espositivo sta avendo un effetto corrosivo sul modo in cui la matematica viene considerata dagli scienziati di altre discipline. L'impenetrabilità della scrittura matematica ha isolato la comunità dei matematici. L'erronea identificazione della

matematica col metodo assiomatico ha fatto sorgere tra gli scienziati il diffuso pregiudizio che la matematica non è altro che una grammatica pedante, buona solo per affrontare l'ovvio e per produrre controesempi marginali a fatti utili che nel complesso sono veri» (Rota 1997, 142).

10) Spezza il rapporto tra la matematica e le scienze naturali. Secondo i sostenitori della concezione astratta, «il servizio reso dall'assiomatica è di aver messo l'accento sulla separazione tra le cose del pensiero dell'intelaiatura assiomatica e le cose reali del mondo reale, e poi di averla realizzata» (Hilbert 1922-23, 87). Fino all'Ottocento ci si era sforzati di «far derivare la matematica da verità sperimentali, segnatamente da intuizioni spaziali immediate; ma, da un lato, la fisica dei quanti ha mostrato che questa intuizione 'macroscopica' del reale copriva fenomeni 'microscopici' di tutt'altra natura, dipendenti da branche della matematica che non erano certo state immaginate in vista di applicazioni alle scienze sperimentali; e, dall'altro lato, il metodo assiomatico ha mostrato che le 'verità' su cui si voleva imperniare la matematica erano solo aspetti molto particolari di concezioni generali che non limitavano ad essi la loro portata. Sicché in fin dei conti quell'intima fusione» tra la matematica e la fisica «di cui ci si faceva ammirare l'armoniosa necessità, non appare altro che un contatto fortuito tra due discipline, i cui legami sono ben più nascosti di quanto si potesse supporre a priori» (Bourbaki 1962, 46).

Con lo spezzarsi del rapporto tra la matematica e le scienze naturali, la matematica perde lo stimolo e la critica che le derivano dalle applicazioni, e le sue relazioni con le scienze fisiche assumono un carattere casuale ed anarchico. Ma, secondo i sostenitori della concezione astratta, questo non è un inconveniente. Al contrario, tra i cambiamenti intervenuti nella concezione della matematica nel Novecento, «quello che comporta una vera rivoluzione nelle idee è la scoperta che la matematica è completamente indipendente dal mondo fisico», una scoperta che «si può dire senza esagerazione segni uno dei progressi intellettuali più significativi nella storia dell'umanità» (Stone 1961, 716). Basandosi su tale scoperta, i sistemi introdotti dalla concezione astratta «non hanno alcuna connessione diretta, immediata o necessaria col mondo fisico» (ivi, 717). Questo non è in contraddizione col successo delle applicazioni della matematica alla scienza naturale, al contrario, il «divorzio della matematica dalle sue applicazioni è stato la vera fonte della sua tremenda vitalità e crescita durante il secolo attuale» (*ibid.*). Infatti, «è solo nella misura in cui la matematica viene liberata dai vincoli che in passato l'hanno legata ad aspetti particolari della realtà che essa può diventare lo strumento estremamente flessibile e potente di cui abbiamo bisogno per aprirci vie in aree oggi al di là della nostra comprensione» (ivi, 720).

11) Rende incomprensibile l'efficacia della matematica nelle scienze naturali. Essa, infatti, spezzando il rapporto tra la matematica e le scienze naturali, non sa più dare una spiegazione plausibile di tale efficacia.

Per esempio Bourbaki, di fronte a domande come: «perché mai hanno successo queste applicazioni? perché una certa dose di ragionamento logico occasionalmente è utile nella vita pratica? perché alcune delle teorie più intricate della matematica sono diventate uno strumento indispensabile per il fisico moderno, per l'ingegnere e per il fabbricante di bombe atomiche?», dichiara candidamente che, «fortunatamente per noi, il matematico non si sente chiamato a rispondere a queste domande, né deve essere ritenuto responsabile di un tale uso o abuso del suo lavoro» (Bourbaki 1949, 2).

Ma così Bourbaki rinuncia a dare una spiegazione dell'efficacia della matematica nelle scienze naturali. Si limita ad affermare che la matematica è «un serbatoio di forme astratte, le strutture matematiche; e si scopre, senza che se ne sappia bene il perché, che certi aspetti della realtà sperimentale vengono a modellarsi in alcune di queste forme come per una sorta di preadattamento» (Bourbaki 1962, 46-47). Se certe parti della matematica si applicano alla realtà, noi «ne ignoriamo totalmente le ragioni profonde» e «forse le ignoreremo sempre» (ivi, 46). Ma in questo modo Bourbaki fa dell'efficacia della matematica nelle scienze naturali un fatto misterioso e inspiegabile.

Addirittura Wigner parla della «irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali» (Wigner 1960, 1). A suo parere, «l'enorme utilità della matematica nelle scienze naturali è qualcosa che confina col misterioso e di cui non vi è alcuna spiegazione razionale» (ivi, 2). Il «miracolo dell'appropriatezza del linguaggio della matematica per la formulazione delle leggi della fisica è un dono meraviglioso che noi non comprendiamo né meritiamo» (ivi, 14). È qualcosa di cui dobbiamo «essere grati e sperare che rimarrà valido nelle ricerche future, e che, nel bene e nel male, si estenderà, con nostro piacere sebbene forse anche con nostro sconcerto, ad ampi settori del sapere» (*ibid.*). Dunque Wigner fa dell'efficacia della matematica nelle scienze naturali un fatto misterioso, inspiegabile, irrazionale e sconcertante.

2. Incongruenze dei sostenitori della concezione astratta

A questi difetti intrinseci nella concezione astratta si aggiungono alcune incongruenze dei suoi sostenitori.

1) Sebbene, secondo la concezione astratta, i termini primitivi di un sistema assiomatico siano scelti in modo arbitrario, siano privi di significato in sé e possano avere più interpretazioni differenti, alcuni sostenitori della concezione astratta affermano che essi sono definiti in modo implicito dagli assiomi.

Per esempio, Hilbert dice che, anche se i termini primitivi non hanno un significato predeterminato, essi «ricevono la loro determinazione in modo implicito mediante gli assiomi» (Hilbert-Bernays 1968-70, I, 7). Questi

ultimi, dunque, sono la definizione dei termini primitivi. Per esempio, gli assiomi della geometria sono «la definizione dei concetti di punto, retta e piano» (Hilbert 1976, 66). Specificamente, gli assiomi di incidenza «stabiliscono un collegamento tra gli oggetti sopra introdotti: punti, rette e piani» (Hilbert 1962, 3). Gli assiomi di ordinamento «definiscono il concetto di 'tra'» (ivi, 4). Gli assiomi di congruenza «definiscono il concetto di congruenza e quindi anche quello di movimento» (ivi, 11). In generale un concetto è definito «attraverso le sue relazioni con altri concetti», e tali relazioni sono espresse dagli assiomi, che pertanto «sono le definizioni dei concetti» (Hilbert 1976, 79).

Ma dire che gli assiomi sono la definizione dei concetti, e precisamente dei termini primitivi, contraddice il fatto che i termini primitivi non possono essere definiti.

A questa obiezione Bernays risponde che, dicendo che i termini primitivi sono definiti in modo implicito dagli assiomi, Hilbert vuole soltanto dire che gli assiomi della geometria «formulano le condizioni sotto cui tre domini di individui e tre funzioni logiche relative ad essi costituiscono i sistemi dei punti, linee rette e piani, e le relazioni di incidenza, ordinamento e congruenza di uno spazio euclideo tridimensionale» (Bernays 1942, 92-93). Ma, se è così, allora non ha senso dire, come fa Hilbert, che gli assiomi sono le definizioni dei concetti. Infatti, una definizione deve determinare univocamente i concetti che essa introduce, mentre, potendo avere più interpretazioni differenti, gli assiomi della geometria non determinano univocamente i termini primitivi.

2) Sebbene, secondo la concezione astratta, gli assiomi di un sistema assiomatico siano scelti in modo arbitrario, siano privi di valore di verità in sé e possano essere veri rispetto a più interpretazioni differenti, alcuni sostenitori della concezione astratta affermano che essi si basano su un'analisi della nostra intuizione.

Per esempio, Hilbert dice che gli assiomi della geometria esprimono «certi fatti fondamentali omogenei della nostra intuizione» (Hilbert 1962, 2). Essi si basano su una «analisi logica della nostra intuizione spaziale» (ivi, 1). Nella geometria «l'intuizione è sempre stata la vera forza orientatrice», e questo «costituisce un esempio luminoso dell'accordo tra intuizione e pensiero» (Hilbert 1932, *v*). Perciò «nella geometria ancor oggi si attribuisce un ruolo importante al cogliere intuitivo, e non solo per il suo alto valore per la ricerca, ma anche per la comprensione e la valutazione dei risultati della ricerca» (Hilbert-Cohn-Vossen 1932, *v*). Vi sono «metodi di ricerca e di dimostrazione che conducono alla conoscenza in forma intuitiva, senza che dobbiamo addentrarci nei particolari delle teorie astratte e del calcolo» (*ibid.*).

Ma dire che gli assiomi della geometria esprimono certi fatti fondamentali omogenei della nostra intuizione contraddice il fatto che, poiché

dal punto di vista della concezione astratta gli assiomi sono scelti in modo arbitrario, col solo vincolo della coerenza, essi non esprimono fatti fondamentali omogenei della nostra intuizione. E dire che nella geometria ancor oggi si attribuisce un ruolo importante al cogliere intuitivo, e che vi sono metodi di ricerca e di dimostrazione che conducono alla conoscenza in forma intuitiva, senza che dobbiamo addentrarci nei particolari delle teorie astratte e del calcolo, contraddice le motivazioni stesse della concezione astratta.

3) Sebbene, secondo la concezione astratta, le dimostrazioni di un sistema assiomatico debbano derivare i teoremi dagli assiomi logicamente, senza fare alcun appello all'intuizione, alcuni sostenitori della concezione astratta ricorrono nelle dimostrazioni all'intuizione attraverso l'uso della figura.

È vero, infatti, che Dieudonné, uno degli esponenti più significativi del Bourbaki, afferma che nelle dimostrazioni «l'intuizione non deve avere il minimo posto; vi regna soltanto la stretta logica» (Dieudonné 1962, 545). In esse il ricorso all'intuizione dev'essere evitato «astenendosi deliberatamente dall'introdurre qualsiasi figura» (Dieudonné 1960, *v-vi*). Coerentemente con ciò Bourbaki nei suoi *Éléments de Mathématique* non fa uso della figura perché è un puritano, «e i puritani sono fortemente contrari alle rappresentazioni figurali delle verità della loro fede» (Senechal 1998, 27). Tuttavia Hilbert, nelle sue *Grundlagen der Geometrie* che sono l'espressione più nota della concezione astratta, fa uso della figura quasi in ogni dimostrazione.

Tale uso non è puramente accessorio ma è assolutamente essenziale. Per vederlo consideriamo, ad esempio, la dimostrazione di Hilbert del seguente teorema.

(1) Per due punti A e C c'è sempre almeno un punto D sulla retta AC che giace tra A e C.

In essa Hilbert fa uso dei seguenti quattro assiomi del sistema delle *Grundlagen der Geometrie*.

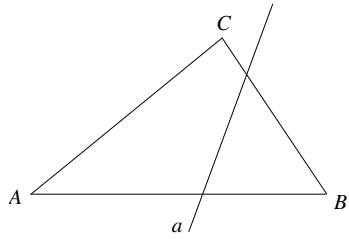
I 3. Ci sono almeno tre punti che non giacciono su una retta.

II 2. Per ogni due punti A e C c'è sempre almeno un punto B sulla retta AC tale che C giace tra A e B.

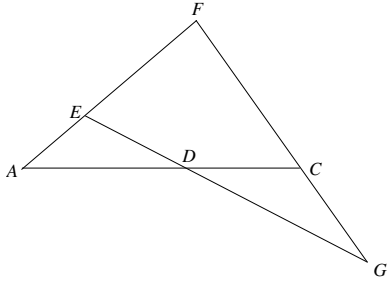
II 3. Di tre punti qualsiasi di una retta ce n'è al massimo uno che giace tra gli altri due.

II 4. Siano A, B, C tre punti che non giacciono su una retta, ed a una retta del piano ABC che non passa per alcuno dei punti A, B, C. Allora, se la

retta a passa per un punto del segmento AB, essa passa anche per un punto del segmento AC o per un punto del segmento BC.



La dimostrazione di Hilbert fa uso della seguente figura e consta dei seguenti passi che si riferiscono a tale figura.



1) Per l'assioma I 3 c'è un punto E che non giace sulla retta AC.

2) Per l'assioma II 2 c'è un punto F sulla retta AE tale che E giace tra A e F.

3) Per l'assioma II 2 c'è un punto G sulla retta FC tale che C giace tra F e G. Per l'assioma II 3 tale punto G non giace tra F e C.

4) Per l'assioma II 4, poiché i tre punti A, F, C non giacciono su una retta e la retta EG non passa per alcuno di questi tre punti ma passa per un punto E del segmento AF, tale retta EG passa anche per un punto del segmento AC o per un punto del segmento FC. Ma poiché EG non passa per alcun punto del segmento FC, ne segue che EG passa per un punto D del segmento AC. Dunque c'è almeno un punto D sulla retta AC che giace tra A e C.

I passi 1) - 4) sono dei lemmi che, messi insieme tramite la figura, danno la costruzione del punto D richiesto da (1). Tali lemmi da soli non bastano per costruire D. Per costruirlo è indispensabile l'uso della figura, perché solo «la figura ci permette di vedere come/perché i lemmi danno il teorema, e anzi, di più, come e perché gli assiomi danno il teorema»

(Tragesser 1992, 176). La figura non è dunque semplicemente uno strumento che ci aiuta a vedere che una certa proposizione è vera in essa, ma è un ulteriore passo 5) che è assolutamente decisivo per vedere che i passi 1) - 4), messi insieme tramite la figura, danno (1).

È vero che l'uso della figura potrebbe essere sostituito da passi puramente logici. Ma in questo modo la dimostrazione diverrebbe molto più lunga e complessa, e soprattutto non sarebbe più la stessa dimostrazione. Si baserebbe, infatti, su regole per l'uso di segni, mentre la dimostrazione di Hilbert si basa, invece, sulla comprensione del significato di ciò che dimostra.

16
Il metodo assiomatico in abiti dimessi

1. Logica dell'organizzazione

Di fronte alle difficoltà a cui va incontro la concezione fondazionalista sono stati fatti vari tentativi di conservare la centralità del metodo assiomatico. In essi, però, si rinuncia alla pretesa che il metodo assiomatico possa servire da strumento per giustificare la matematica attraverso un'indagine del suo fondamento, e si assegna a tale metodo un ruolo più modesto. In seguito considereremo alcuni di questi tentativi.

Un primo tentativo di conservare la centralità del metodo assiomatico consiste nell'affermare, come fa Mac Lane, che esso è utile come strumento per l'organizzazione e la sistemazione di un corpo di conoscenze matematiche. Quest'ultimo viene prima sviluppato in forma sparsa, e poi, grazie al metodo assiomatico, «viene organizzato mediante un sistema formale di concetti, assiomi, definizioni, e dimostrazioni», com'è avvenuto con le assiomatizzazioni di Dedekind-Peano dei numeri naturali, di Euclide e Hilbert della geometria, e di Dedekind dei numeri reali, che sono «le assiomatizzazioni formali standard della scienza del numero, dello spazio e del tempo» (Mac Lane 1986, 6).

Secondo Mac Lane, questo mostra che, «data una lunga lista di 'tutti' i teoremi su un dato argomento, li si può dedurre tutti da un'opportuna lista più corta, una lista che dunque costituirà gli assiomi per quell'argomento. La scelta giusta degli assiomi può portare ad una grande perspicuità e ad una migliore comprensione» (ivi, 39). Questo modo di organizzare e sistemare le conoscenze matematiche «può sembrare più naturale per alcune parti della matematica piuttosto che per altre. Oggi però esso è sempre disponibile per ogni parte della matematica» (Mac Lane 1981, 465).

Questo tentativo di conservare la centralità del metodo assiomatico va però incontro ad alcune difficoltà.

1) Dire che l'assiomatizzazione è sempre disponibile per ogni parte della matematica è in conflitto col primo teorema di incompletezza di Gödel, in base al quale, per ogni sistema formale *S* per una data parte della matematica, o *S* è incoerente e allora non organizza e sistema un bel niente, oppure *S* è coerente, ma allora esistono verità di tale parte della matematica che non sono dimostrabili in *S*. Dunque *S* non organizza e sistema tutte le conoscenze di quella parte della matematica.

2) Dire che l'assiomatizzazione è sempre disponibile per ogni parte della matematica è in conflitto con l'esperienza matematica, la quale mostra che parti importanti della matematica non possono essere assiomatizzate in modo naturale. Tale è il caso, ad esempio, della teoria dei numeri e di gran parte della teoria delle equazioni differenziali parziali.

3) Dire che l'assiomatizzazione è sempre disponibile per ogni parte della matematica è in conflitto con l'esperienza matematica, la quale offre numerosi esempi di teoremi di una data parte della matematica, la cui dimostrazione non si basa solo sui principi e i risultati di quella parte, ma richiede l'uso di principi e risultati di altre parti. Un esempio è dato dall'ultimo teorema di Fermat. Questo significa che il sistema di assiomi non organizza e sistema tutte le conoscenze di quel campo della matematica.

2. Logica dell'unificazione

Un altro tentativo di conservare la centralità del metodo assiomatico consiste nell'affermare, come fa Maddy, che esso è utile perché consente di unificare la matematica riducendola ad un unico sistema assiomatico, specificamente al sistema *ZFC* della teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel più l'assioma di scelta. Grazie a tale riduzione «la matematica è profondamente unificata; si mettono in luce le interconnessioni tra le sue branche; si fanno risalire i teoremi classici ad un'unica fonte; si possono trasferire i metodi efficaci da una branca all'altra; si può mettere in azione tutta la potenza dei principi più fondamentali della teoria degli insiemi applicandola a problemi prima insolubili; si possono valutare nuove congetture per la fattibilità delle dimostrazioni; e sistemi assiomatici sempre più forti promettono conseguente sempre più fruttuose» (Maddy 1997, 28).

Secondo Maddy, è vero che, a causa del secondo teorema di incompletezza di Gödel, il metodo assiomatico non fornisce una fondazione della matematica perché «non dà certezza epistemica ma solo unità ontologica» (Maddy 2000, 344). E che «la libertà dalla contraddizione è un ovvio desideratum per ogni teoria matematica, specialmente per una destinata ad un ruolo così centrale» come la teoria degli insiemi; e che «i nuovi candidati ad assiomi devono essere guardati con sospetto (per lo meno) nella misura in cui sembrano capaci di introdurre contraddizioni; ma, con tutto ciò, possiamo ancora sostenere che l'unificazione data dalla fondazione

insiemistica è matematicamente preziosa, nonostante la mancanza di una dimostrazione di coerenza» (Maddy 1997, 30).

Grazie a tale unificazione, «strutture vaghe sono rese più precise, vecchi teoremi ricevono nuove dimostrazioni e sono unificati con altri teoremi che prima sembravano assolutamente distinti, alla base di campi matematici disparati si rintracciano ipotesi simili, le questioni di esistenza ricevono un significato esplicito, si possono individuare congetture indimostrabili, nuove ipotesi possono decidere vecchi problemi aperti, e così via» (ivi, 34-35). In particolare, le questioni di esistenza acquistano un significato esplicito perché, «nella matematica contemporanea ortodossa, il problema di quali generi di cose o strutture matematiche esistono è in ultima analisi il problema di quali tipi di insiemi esistono, e la questione di che cosa è dimostrabile è in ultima analisi la questione di che cosa è dimostrabile a partire dagli assiomi della teoria degli insiemi» (Maddy 2000, 344).

Questo tentativo di conservare la centralità del metodo assiomatico va però incontro alle difficoltà che abbiamo già visto quando abbiamo parlato del riduzionismo assiomatico.

3. Logica della postulazione

Un altro tentativo di conservare la centralità del metodo assiomatico consiste nell'affermare, come fa Shapiro, che esso è utile come strumento per studiare le strutture. La matematica è lo studio delle strutture, o meglio, è «lo studio deduttivo delle strutture» (Shapiro 2000, 259). Una struttura è caratterizzata da una definizione implicita, e le proprietà della struttura vengono stabilite «per deduzione a partire dalla definizione implicita» (ivi, 285). Le proposizioni di cui consta la «definizione implicita sono talora dette 'assiomi'» (ivi, 284).

Secondo Shapiro, affinché una definizione implicita caratterizzi una struttura basta che essa sia coerente, perché «una volta che ci siamo convinti che una definizione implicita è coerente, non si pone alcuna ulteriore questione circa il fatto se essa caratterizzi una struttura e se i suoi termini si riferiscano a qualcosa» (ivi, 286). Infatti «gli oggetti matematici sono legati alle strutture, e una struttura esiste se c'è una sua assiomatizzazione coerente» (*ibid.*).

Ma che cosa significa che una definizione implicita è coerente? Secondo Shapiro, non può significare che da essa non si può dedurre alcuna contraddizione. Infatti, questa nozione di coerenza fa riferimento all'insieme di tutte le deduzioni, perché richiede che tale insieme non contenga la deduzione di una contraddizione. Ma le deduzioni sono stringhe di stringhe di simboli, e la struttura dell'insieme di tutte tali «stringhe è la stessa di quella dei numeri naturali», perciò non possiamo dire che «la struttura dei numeri

naturali esiste perché l'aritmetica è coerente, se questa coerenza viene intesa come un fatto relativo alla struttura dei numeri naturali» (ivi, 287).

Che una definizione implicita sia coerente significa invece, secondo Shapiro, che la struttura che essa definisce può essere modellata nella gerarchia degli insiemi, ossia nella gerarchia che si ottiene partendo dall'insieme vuoto e applicando un numero qualsiasi (transfinito) di volte l'operazione di insieme-potenza, cioè l'operazione mediante la quale si prendono tutti i sottoinsiemi di un insieme.

Modellare una struttura significa «trovare un sistema che la esemplifica. Se una struttura è esemplificata da un sistema, allora sicuramente l'assiomatizzazione è coerente e la struttura è possibile» e perciò «essa esiste» (ivi, 288). Ora, la gerarchia degli insiemi «è così grande che proprio ogni struttura può esservi modellata o esemplificata» (*ibid*.). Perciò essa permette di stabilire la coerenza di qualsiasi definizione implicita.

In questo modo la coerenza di ogni definizione implicita si riduce a quella della teoria degli insiemi. Ma quale giustificazione si può dare della coerenza della teoria degli insiemi? Secondo Shapiro, «la coerenza della teoria degli insiemi è presupposta da molta dell'attività fondazionale della matematica contemporanea. A ragione o a torto, la matematica presuppone che la soddisfacibilità (nella gerarchia degli insiemi) sia sufficiente per l'esistenza. Un esempio di ciò è dato dall'uso della gerarchia insiemistica come sfondo della teoria dei modelli, e in generale della logica matematica» (ivi, 288-289). Dobbiamo allora accettare questo presupposto e usarlo, come fanno la matematica e la logica matematica, perché non siamo «meglio (né peggio) in grado di giustificarlo» (ivi, 289). La giustificazione della coerenza della teoria degli insiemi sta dunque nel fatto che essa è presupposta dalla matematica e dalla logica matematica.

Questo tentativo di conservare la centralità del metodo assiomatico va però incontro ad alcune difficoltà.

1) L'assunzione che la matematica sia lo studio delle strutture si scontra col fatto che vi sono molte parti della matematica che non possono essere presentate facilmente come concernenti l'assiomatizzazione di qualche struttura. Problemi come quello del perché i numeri π ed e sono trascendenti, o di come sono distribuiti i numeri primi, non hanno un carattere strutturale. Inoltre, molta parte del lavoro sulle equazioni differenziali parziali o sulla teoria dei numeri non può essere descritto naturalmente in termini di strutture assiomatizzate da definizioni implicite.

2) L'argomento che la giustificazione della coerenza della teoria degli insiemi sta nel fatto che essa è presupposta dalla matematica e dalla logica matematica, non è più probante dell'argomento che la giustificazione dell'esistenza di Dio sta nel fatto che essa è presupposta dall'esistenza del mondo.

3) Se ogni struttura matematica è caratterizzata da una definizione implicita, lo stesso dovrebbe valere per la gerarchia degli insiemi, che Shapiro «considera come costituente una struttura» (ivi, 287). Ma non può esistere alcuna definizione implicita della gerarchia degli insiemi perché, se esistesse, definirebbe l'insieme di tutti gli insiemi e ciò darebbe luogo a paradossi. Né fa differenza che tale struttura venga intesa come la struttura consistente della gerarchia degli insiemi dotata della relazione di appartenenza, oppure come la categoria i cui oggetti comprendono tutti gli insiemi e i cui morfismi comprendono tutte le applicazioni tra insiemi.

4. Logica della scoperta

Un altro tentativo di conservare la centralità del metodo assiomatico consiste nell'affermare, come fa Bourbaki, che esso è utile come strumento di scoperta, anzi che «il suo impiego sistematico come strumento di scoperta è uno dei tratti originali della matematica contemporanea» (Bourbaki 1960, 2).

Infatti, secondo Bourbaki, quest'ultima si basa sulla concezione astratta, per la quale i termini primitivi di un sistema assiomatico possono avere più interpretazioni e le proposizioni primitive possono essere vere rispetto a più interpretazioni. Grazie a questa pluralità di interpretazioni «uno stesso calcolo algebrico può servire a risolvere problemi riguardanti chilogrammi o franchi, parabole o moti uniformemente accelerati», e parimenti, «una volta stabiliti i teoremi della topologia generale, li si può applicare a volontà allo spazio ordinario, allo spazio di Hilbert e a molti altri ancora» (ivi, 2-3). La possibilità di dare contenuti multipli alle parole o nozioni prime di una teoria è «un'importante fonte di arricchimento dell'intuizione del matematico» (ivi, 3).

Questo tentativo di conservare la centralità del metodo assiomatico va però incontro ad alcune difficoltà.

1) Dire che il metodo assiomatico è utile come strumento di scoperta trascura che fin dall'antichità tale metodo è stato usato solo come strumento didattico, per esporre in modo più pulito e compatto risultati già acquisiti. Questo carattere del metodo assiomatico è sottolineato già da Aristotele, secondo cui «didattiche sono le argomentazioni che deducono alcunché partendo dai principi propri di ciascuna disciplina» (Aristotele, *De Sophisticis Elenchis*, 2, 165 b 1). Inoltre Proclo presenta gli *Elementi* di Euclide come un'opera didattica, perché dice che in essi Euclide sistemò molti risultati precedenti, sebbene «non vi raccolse tutto quello che avrebbe potuto raccogliervi, ma solo ciò che avrebbe potuto servire da introduzione» (Proclo 1992, 69.8-9). La finalità didattica del metodo assiomatico è ribadita anche da molti matematici contemporanei, i quali sottolineano che l'assiomatizzazione è ciò che si fa per ultimo, quando si vogliono esporre in forma più pulita e compatta risultati già ottenuti. Essa è l'igiene della matematica, e pertanto è

cosa di poca importanza ai fini della ricerca matematica. Di fatto i risultati della teoria dei numeri esistevano prima degli assiomi di Peano per i numeri naturali, il calcolo infinitesimale esisteva prima degli assiomi di Dedekind per i numeri reali, e così via.

2) Dire che il metodo assiomatico è uno strumento di scoperta perché i termini primitivi di un sistema assiomatico possono avere più interpretazioni e le proposizioni primitive possono essere vere rispetto a più interpretazioni, e perciò i teoremi possono essere veri rispetto a più interpretazioni ed avere più applicazioni, significa confondere lo sviluppo della matematica con le applicazioni della matematica. Che un teorema possa avere più applicazioni non dà alcun risultato matematico nuovo, ma solo nuove applicazioni di un risultato già acquisito.

3) Dire che l'impiego sistematico del metodo assiomatico come strumento di scoperta è uno dei tratti originali della matematica contemporanea, trascura che alcuni dei risultati più eclatanti di quest'ultima non sono stati ottenuti con tale metodo. Per esempio, l'ultimo teorema di Fermat non è stato ottenuto deducendolo dagli assiomi di Dedekind-Peano per i numeri naturali, ma usando come lemmi risultati non deducibili da tali assiomi.

5. Logica della giustificazione debole

Un altro tentativo di conservare la centralità del metodo assiomatico consiste nell'affermare, come fa Gillies, che esso è utile come strumento di giustificazione. Sebbene il metodo assiomatico non possa essere seriamente considerato come una logica della scoperta, «nondimeno noi abbiamo bisogno di una logica della giustificazione, parzialmente separata dalla logica della scoperta e in aggiunta ad essa», e «la logica matematica e il metodo assiomatico servono in un certo qual modo a fornire una tale logica della giustificazione» (Gillies 1999, 214).

Per logica della giustificazione Gillies non intende una logica della giustificazione forte, ossia una logica che giustifica la matematica attraverso un'indagine del suo fondamento, perché per il secondo teorema di incompletezza di Gödel una tale logica non può esistere. Intende, invece, una logica della giustificazione debole, ossia una logica che permette di controllare la correttezza delle dimostrazioni matematiche ottenute a partire degli assiomi, assumendo che gli assiomi siano giustificati, ma senza darne alcuna giustificazione. Secondo Gillies, la ragione per cui abbiamo bisogno di una logica della giustificazione debole è che spesso le dimostrazioni della matematica ordinaria contengono errori difficilmente rintracciabili, e per rintracciarli occorre una corte suprema di giudizio, che è costituita appunto dalla logica matematica e dal metodo assiomatico.

Nella pratica del diritto, osserva Gillies, «moltissimi casi sono trattati nelle corti ordinarie di livello inferiore, ma quasi tutti i sistemi legali hanno una corte del massimo livello (la Corte Suprema negli U.S.A. o la Camera dei Lord nel Regno Unito) per trattare casi difficili, a cui si fa appello da parte delle corti inferiori. Queste corti del massimo livello non si occupano degli affari legali di ogni giorno, ma sono necessarie per il funzionamento complessivo del sistema legale» (ivi, 216). Similmente, nella pratica della matematica, moltissimi casi di errore nelle dimostrazioni sono trattati dalla corte ordinaria di livello inferiore, costituita dalla logica naturale del matematico. Ma, per trattare casi difficili di errori nelle dimostrazioni, si deve ricorrere ad una corte del massimo livello, costituita dalla logica matematica e dal metodo assiomatico.

Le dimostrazioni della matematica ordinaria «raramente sono completamente formalizzate, con la logica resa esplicita» (ivi, 215). Per lo più sono solo parzialmente formalizzate, cioè in esse non si usano le regole di deduzione della logica matematica. Per questo motivo, secondo Gillies, «abbastanza spesso si pubblicano dimostrazioni sbagliate, e talora esse vengono accettate per un certo tempo. Possiamo immaginare che in una dimostrazione possano esserci passi la cui validità viene messa in questione. A questo punto per risolvere la questione disponiamo della logica matematica. Se si possono tradurre i passi in un sistema standard di logica e si può mostrare che essi sono validi in quel sistema, generalmente si accetta che l'inferenza è davvero valida. Perciò si può sostenere che la logica matematica è una corte superiore per il ragionamento matematico» (ivi, 216). In quanto la logica matematica e il metodo assiomatico costituiscono una tale corte superiore, essi danno «una fondazione alla matematica contemporanea» (*ibid.*).

Questo tentativo di conservare la centralità del metodo assiomatico va però incontro ad alcune difficoltà.

1) Affinché la logica matematica possa svolgere la funzione di corte del massimo livello, si deve essere certi della correttezza della codificazione delle dimostrazioni informali mediante le dimostrazioni formali. Ma, come abbiamo già osservato in precedenza, tale codificazione è tutt'altro che una questione di routine, richiede necessariamente un'analisi del significato, la quale è facilmente soggetta ad errori che non possono essere controllati con un computer, e perciò non è assolutamente certa, è soltanto probabile.

2) Come sottolinea già la *Logica di Port-Royal*, «la maggior parte degli errori degli uomini provengono assai più dal fatto che essi ragionano in base a principi falsi, che non dal fatto che ragionano seguendo male i loro principi. Raramente accade che ci si lasci ingannare da ragionamenti che sono falsi solamente perché la conclusione è derivata male» (Arnauld-Nicole 1981, 177-178). In particolare, gli errori nelle dimostrazioni matematiche sono dovuti assai più all'uso di principi non-logici erronei che ad inferenze logiche

sbagliate. Per garantirsi contro l'uso di principi non-logici erronei occorrerebbe quanto meno mostrare infallibilmente che tali principi sono coerenti tra loro, ma questo è impossibile a causa del secondo teorema di incompletezza di Gödel.

6. Logica dell'inversione

Un altro tentativo di conservare la centralità del metodo assiomatico consiste nell'affermare, come fa Simpson, che esso è utile per trattare il problema: «dato un teorema τ della matematica ordinaria, qual è il più debole sottosistema naturale $S(\tau)$ » del sistema formale per la matematica infinitaria «in cui τ è dimostrabile?» (Simpson 1999, 32). Questo è il problema basilare della cosiddetta matematica inversa, nella quale, per stabilire che il sistema formale $S(\tau)$ è il più debole sottosistema del sistema formale per la matematica infinitaria in cui τ è dimostrabile, si deducono gli assiomi di $S(\tau)$ dal teorema τ. Questo è «l'opposto del consueto schema della pratica matematica ordinaria, in cui i teoremi vengono dedotti dagli assiomi» (ivi, 33). Di qui il nome di matematica inversa.

Secondo Simpson, la matematica inversa ha permesso di vedere che, anche se, a causa dei risultati di incompletezza di Gödel, «non vi è alcuna speranza di realizzare completamente il programma di Hilbert», nondimeno «un'ampia parte della pratica matematica infinitaria di fatto è riducibile finitariamente» (ivi, 37). Essa, infatti, ha fatto vedere che esiste un sottosistema S_0 del sistema formale *S* della matematica infinitaria tale che, da un lato, S_0 permette di sviluppare un'ampia parte della pratica matematica, e, dall'altro lato, è tale che ogni enunciato esprimente una proposizione reale che è dimostrabile in S_0 è vero nella matematica finitaria. Questo implica, secondo Simpson, «che una parte significativa della pratica matematica è riducibile finitariamente, nel preciso senso previsto da Hilbert» (ivi, 382). Dunque S_0 «incorpora una realizzazione parziale significativa e di vasta portata del programma di Hilbert del riduzionismo finitario» (*ibid.*).

Questo tentativo di conservare la centralità del metodo assiomatico va però incontro ad alcune difficoltà.

1) Dedurre gli assiomi dai teoremi non ha nulla a che fare col metodo assiomatico, ha piuttosto a che fare col metodo analitico, perché indaga, dato un teorema, quali ipotesi, in effetti quali ipotesi minime, sono necessarie per dimostrarlo. Quindi presentare, come fa Simpson, la matematica inversa come un progetto volto a conservare la centralità del metodo assiomatico, sembra improprio.

2) Dedurre gli assiomi dai teoremi non serve a giustificare un frammento della matematica infinitaria. Lo stesso Simpson lo riconosce

quando ammette «che la riduzione delle dimostrazioni infinitarie a quelle finitarie non aumenta la fiducia nella correttezza formale delle dimostrazioni infinitarie» (Simpson 1988, 359). Per questo motivo «la deduzione degli assiomi dai teoremi è assente nella formulazione di Hilbert del suo programma» e «non sarebbe mai stata tollerata da Hilbert» (ivi, 361). Inoltre, essa non compare più neppure nel sottosistema S_0, e quindi «è assente nella forma finale dei nostri risultati» (*ibid*.).

3) Dedurre gli assiomi dai teoremi serve per scopi euristici. Lo stesso Simpson lo riconosce quando afferma che, in quanto la matematica inversa ci ha aiutato a trovare i teoremi che sono finitariamente riducibili, e quindi ci ha aiutato a trovare il sottosistema S_0, essa «ha svolto e continuerà a svolgere dietro le quinte un importante ruolo euristico nella scoperta di tali risultati» (*ibid*.). Ma, appunto, si tratta di un ruolo euristico, diverso da quello fondazionale proprio del riduzionismo finitario.

17
Concezione fondazionalista e oggetti matematici

1. Il problema dell'esistenza matematica

Nei capitoli precedenti abbiamo visto come la concezione fondazionalista tratta il problema della giustificazione della matematica e quali sono i limiti delle soluzioni che essa propone. Ma anche se per tale concezione quello della giustificazione è il principale problema della filosofia della matematica, non è l'unico problema. Un altro problema è quello dell'esistenza matematica, cioè il problema: esistono oggetti matematici e, in caso affermativo, quale ne è la natura?

Nella concezione fondazionalista il problema dell'esistenza matematica trae origine dal modo in cui tale concezione tratta il problema della giustificazione della matematica. In particolare, il problema dell'esistenza matematica nasce per due vie differenti.

1) La concezione fondazionalista dà per scontato che la matematica è conoscenza assolutamente certa, ma vuole giustificarla individuando la base della sua certezza. Questo fa nascere il problema: di che cosa la matematica è conoscenza assolutamente certa? Le proposizioni che i matematici dimostrano sembrano concernere numeri, funzioni, punti, ecc.. Per esempio, Euclide dimostra che, per ogni numero primo, ne esiste uno maggiore. Tale teorema sembra concernere i numeri. Ma che cosa sono i numeri? Sono oggetti dotati di un qualche tipo di esistenza e, in caso affermativo, quale ne è la natura?

2) La concezione fondazionalista individua la base della certezza della matematica nell'intuizione. Questo fa nascere il problema: di che cosa l'intuizione è intuizione? Se è intuizione di certe cose, che cosa sono queste cose? Sono oggetti dotati di un qualche tipo di esistenza e, in caso affermativo, quale ne è la natura?

Poiché nella concezione fondazionalista il problema dell'esistenza matematica trae origine dal modo in cui tale concezione tratta il problema

della giustificazione, ne segue che in essa il problema dell'esistenza matematica deriva da quello della giustificazione della matematica, dunque è strettamente legato ad esso e trae il suo interesse da esso.

2. Il ruolo del problema dell'esistenza matematica

A differenza del problema della giustificazione della matematica, quello dell'esistenza matematica non ha svolto, però, un ruolo centrale fin dall'origine della concezione fondazionalista.

Infatti, Kant non parla mai dell'esistenza degli oggetti matematici, perché ritiene che «nei problemi matematici non si tratta» affatto «dell'esistenza ma delle proprietà degli oggetti in se stessi» (Kant 1900- , III, 472). Ciò che in lui svolge il ruolo dell'esistenza è la costruibilità. Ma questa non dà l'esistenza reale, che per Kant è sempre legata alla percezione, perché «conoscere la realtà della cose richiede la percezione» (ivi, III, 189). Si potrebbe pensare che la costruibilità dia almeno l'esistenza possibile, ma essa la dà solo in un certo senso. Per esempio, secondo Kant, la costruibilità del concetto di triangolo non basta per stabilire la possibilità di un triangolo, perché questa richiede qualcosa di più della costruibilità del concetto di triangolo, cioè richiede che «tale figura sia pensata soltanto alle condizioni a cui sottostanno tutti gli oggetti dell'esperienza» (ivi, III, 189). Ora, tali condizioni non sono solo lo spazio in quanto «condizione formale a priori delle esperienze esterne», ma anche il fatto che «la sintesi formativa mediante la quale costruiamo un triangolo nell'immaginazione è esattamente la stessa di quella che noi usiamo nell'apprensione di un fenomeno, per farne un concetto di esperienza» (ivi, III, 189). Ma allora la conoscenza dell'esistenza possibile di un triangolo appartiene alla filosofia piuttosto che alla matematica.

Parimenti Hilbert, negli scritti sui programmi della coerenza e della conservazione, non parla mai dell'esistenza degli oggetti matematici, perché considera gli oggetti della matematica infinitaria soltanto come cose ideali o finzioni ben fondate. Egli ne parla solo negli scritti di epoca precedente, in cui però tratta l'esistenza degli oggetti matematici semplicemente come un modo di dire. In essi, infatti, egli afferma che, «se si riesce a dimostrare che le note caratteristiche attribuite ad un concetto non possono mai portare a contraddizione usando un numero finito di inferenze logiche», allora diciamo che «con ciò è stata dimostrata l'esistenza matematica del concetto, per esempio, di un numero o di una funzione, che soddisfa certe condizioni» (Hilbert 1970, III, 301). Invece, «se si attribuiscono ad un concetto note caratteristiche che si contraddicono tra loro», allora diciamo che «il concetto matematicamente non esiste» (*ibid.*). È chiaro che qui per esistenza Hilbert non intende l'esistenza reale. Vuole soltanto dire che l'unico senso in cui il

matematico ha bisogno di parlare di esistenza degli oggetti matematici è che gli assiomi relativi ad essi sono coerenti.

Il problema dell'esistenza matematica ha svolto un ruolo centrale nella concezione fondazionalista solo negli ultimi decenni, mano a mano che è diventato sempre più evidente il fallimento di tutti i tentativi di risolvere il problema della giustificazione della matematica, inteso come il problema di chiarire la base della sua certezza. In risposta a tale fallimento, invece di rimettere in discussione le ragioni stesse della filosofia della matematica, i sostenitori della concezione fondazionalista si sono limitati a ripiegare sul problema dell'esistenza matematica. Tale problema ha finito per acquistare un peso tale che oggi le posizioni nell'ambito della filosofia della matematica vengono comunemente distinte non più in termini del problema della giustificazione della matematica, bensì in termini del problema dell'esistenza matematica.

Per esempio, Shapiro afferma che «nella filosofia della matematica contemporanea vi sono due scuole» (Shapiro 2000, 201). I membri della prima scuola sostengono che gli oggetti matematici, ossia cose come «i numeri, le funzioni, i punti, e così via, esistono indipendentemente dal matematico» (ivi, *ix*). Perciò essi hanno il problema di «mostrare come possiamo avere conoscenza di tali cose, e in che relazione sta la matematica, così interpretata, col mondo fisico» (*ibid.*). I membri della seconda scuola, invece, «negano l'esistenza di oggetti specificamente matematici» (*ibid.*). Essi hanno, perciò, il problema di «riformulare la matematica, o un suo surrogato, in modo che l'esistenza di particolari oggetti matematici (numeri e insiemi) non sia presupposta nell'impresa scientifica» (ivi, 226). Dunque Shapiro distingue le posizioni nell'ambito della filosofia della matematica in termini del problema dell'esistenza matematica.

3. Caduta del problema dell'esistenza matematica

Questo, però, è insoddisfacente perché non si possono distinguere adeguatamente le posizioni nell'ambito della filosofia della matematica in termini del problema dell'esistenza matematica, ma solo in termini del problema della giustificazione della matematica.

Ciò dipende dal fatto che, come abbiamo visto, nella concezione fondazionalista il problema dell'esistenza matematica trae origine dal modo in cui tale concezione formula il problema della giustificazione. Esso è semplicemente un sottoprodotto di tale modo, e perciò il suo interesse è strettamente legato a quello del problema della giustificazione della matematica.

Dal momento che tutte le vie tentate nell'ambito della concezione fondazionalista per risolvere il problema della giustificazione della matematica si sono rivelate fallimentari, tale problema ha perso interesse. Se

ne deve concludere, perciò, che anche il problema dell'esistenza matematica, in quanto deriva da quello della giustificazione della matematica, e quindi è strettamente legato ad esso, ha perso interesse. Continuare a coltivarlo, come fa la filosofia della matematica attuale, indipendentemente dal problema da cui ha tratto origine e che gli dava interesse, è un futile esercizio.

4. Irrilevanza del problema dell'esistenza matematica

Che continuare a coltivare il problema dell'esistenza matematica indipendentemente dal problema della giustificazione della matematica sia un futile esercizio si vede dal fatto che tale problema è irrilevante per la matematica.

Questo è sottolineato già da Locke, secondo cui «tutti i discorsi dei matematici sulla quadratura del cerchio, sulle sezioni coniche, o su qualunque altra parte della matematica, non concernono l'esistenza di alcuna di quelle figure: ma le loro dimostrazioni, che dipendono dalle loro idee, sono le stesse, che vi sia o non vi sia alcun quadrato o circolo» (Locke 1975, 566). I matematici parlano e discutono del problema dell'esistenza matematica, ma «la maggior parte di quei discorsi che assorbono i pensieri e impegnano le dispute di coloro che pretendono di assumersi il compito di indagare la verità e la certezza presumibilmente risulteranno, ad un debito esame, essere proposizioni generali e nozioni in cui non è affatto implicata l'esistenza» (*ibid.*).

L'argomento di Locke è stato ripreso da molti, spesso sotto forma di esperimento mentale.

Per esempio, Rota propone il «seguente esperimento mentale: immaginate che qualcuno dimostri, al di là di ogni ragionevole dubbio, che gli oggetti matematici non esistono (ma tuttavia sono coerenti). Credete che tale dimostrazione avrebbe conseguenze per la verità di qualche asserzione matematica? Certamente no» (Rota 1997, 161). Di fatto «si può passare la vita a lavorare nella matematica senza aver mai idea se gli oggetti matematici esistono, né ci si deve interessare di tale questione. L'esistenza degli oggetti matematici è un capitolo della filosofia della matematica che è senza conseguenze» (*ibid.*). Le discussioni in merito «sono andate avanti a lungo. Alcuni rispettabili pensatori hanno sostenuto che gli oggetti matematici esistono (in un senso o nell'altro); altri egualmente rispettabili pensatori hanno argomentato che gli oggetti matematici non esistono. Il risultato finale è che si è fatta strada l'opinione che non importa se gli oggetti matematici esistono, e probabilmente ha poco senso porsi il problema» (*ibid.*).

Parimenti, Azzouni propone il seguente esperimento mentale: «immaginate che gli oggetti matematici abbiano cessato di esistere ad un certo punto nel 1968. Il lavoro matematico è andato avanti come al solito. Perché non avrebbe dovuto?» (Azzouni 1994, 56). La «pratica matematica

quotidiana non assegna alcun ruolo epistemico agli oggetti matematici, e perciò non risponde alla preoccupazione che, per i suoi teoremi, non esistano oggetti matematici di cui essere veri. È compatibile» con essa che «non esistano oggetti matematici», perciò le attività «in cui si impegnano i matematici vengono radicalmente fraintese se si presume che gli oggetti matematici abbiano o debbano avere un qualche ruolo epistemico nella pratica matematica» (Azzouni 2000, 226).

Poiché il problema dell'esistenza matematica è irrilevante per la matematica, esso dà un senso di irrealtà. Staccato dal problema della giustificazione della matematica da cui ha tratto origine, tale problema non riesce a trovare un ruolo autonomo e si scontra col fatto che, per la matematica, che esistano o non esistano oggetti matematici non fa alcuna differenza.

PARTE III

LA CONCEZIONE EURISTICA

18
La concezione euristica

1. Caratteri della concezione euristica

Dopo aver esaminato la concezione fondazionalista e i suoi limiti, consideriamo ora la concezione euristica.

Tale concezione è stata sviluppata nei primi decenni del Seicento da Descartes, ha avuto un notevole rilievo per oltre un secolo, ma poi ha perso peso fin quasi a scomparire del tutto.

In base ad essa la filosofia deve occuparsi di come la matematica pone i propri problemi e trova ipotesi per risolverli, onde perfezionare i metodi di scoperta esistenti e trovarne di nuovi. La filosofia non è un'attività autonoma dalla matematica ma è un continuo con essa, sebbene tratti, più che dei contenuti della matematica, dei suoi metodi, e in particolare dei suoi metodi di scoperta. La scoperta delle ipotesi svolge un ruolo centrale nell'attività matematica, perciò è naturale che la filosofia la assuma come oggetto principale di studio. Il principale problema della filosofia rispetto alla matematica è: quali metodi servono a scoprire le ipotesi per risolvere i problemi?

Il nome di concezione euristica deriva dal fatto che 'euristico' significa 'che serve a scoprire'. Dunque la concezione euristica viene chiamata così perché assume come principale oggetto di studio l'indagine di metodi che servono a scoprire le ipotesi per risolvere i problemi. Che tali metodi esistano appare chiaro dall'analisi di numerosi casi storici, i quali mostrano che le ipotesi sono state scoperte attraverso processi razionali. Chi lo nega affermando che le ipotesi non avevano alcun rapporto logico con i dati, lo fa in nome di una visione irrazionalistica dello sviluppo della matematica che non trova riscontro nei fatti.

Pertanto la filosofia non può rinunciare ad indagare i metodi che servono a scoprire le ipotesi per risolvere i problemi, ma deve assumersi il compito di farlo, sia studiando i migliori metodi di scoperta esistenti al

momento, giudicati tali in riferimento al loro successo, sia trovandone di nuovi. Con una tale indagine la filosofia non vuol erigere una sovrastruttura sulla matematica, ma vuol contribuire ad elaborare strumenti utili per la sua chiarificazione e il suo sviluppo.

2. Il posto della scoperta nell'attività matematica

Prima di dedicarsi a tale compito la filosofia deve, però, affrontare due questioni preliminari.

La prima questione preliminare è: che tipo di processo è la scoperta delle ipotesi per risolvere i problemi?

Si ritiene comunemente che tale processo sia un processo irrazionale, individuale e soggettivo, che si colloca soltanto in una prima fase della ricerca matematica, a cui poi ne fa seguito un'altra, quella della giustificazione, che ha invece un carattere oggettivo. Si pensa perciò che esso non abbia alcun peso epistemico e che questo debba essere attribuito soltanto alla giustificazione.

Ma, secondo la concezione euristica, questa opinione non è plausibile perché, da un lato, la scoperta non è un processo assolutamente irrazionale, individuale e soggettivo, c'entra sempre un bel po' di ragionamento, e, dall'altro lato, la giustificazione non è un processo completamente oggettivo, c'entrano anche molti elementi personali e idiosincrasie collettive.

Inoltre, la scoperta non si colloca in una prima fase della ricerca matematica a cui poi ne fa seguito un'altra, quella della giustificazione, ma copre l'intero suo arco. Infatti, essa è la via attraverso cui si arriva a conoscere qualcosa, e non si può arrivare a conoscere qualcosa senza darne nello stesso tempo una giustificazione.

I matematici non scoprono le ipotesi per risolvere i problemi con certi metodi e poi le giustificano con altri metodi. Infatti, la scoperta non consiste nel formulare ipotesi a caso, bensì nel formulare ipotesi plausibili, cioè compatibili con la conoscenza esistente. Ora, per vedere che le ipotesi sono compatibili con la conoscenza esistente si devono esaminare le ragioni pro e contro di esse, questo esame viene condotto basandosi su fatti che avvalorano le ipotesi o le screditano. Di conseguenza i processi attinenti alla scoperta sono inseparabili da quelli attinenti alla giustificazione.

Alla base della dicotomia tra scoperta e giustificazione vi è l'idea che la scoperta sia un atto istantaneo e irrazionale. Al contrario, secondo la concezione euristica, la scoperta è un processo razionale lungo e complesso. Essa comporta un confronto con la conoscenza esistente, confronto che serve nello stesso tempo alla scoperta delle ipotesi e alla loro giustificazione. Perciò, presentando il processo matematico come composto di due fasi temporalmente distinte, quella della scoperta e quella della giustificazione, se

ne dà una rappresentazione distorta. Occorre invece vedere il processo matematico come un tutto unico, riconoscendo che i metodi di scoperta sono nello stesso tempo anche metodi di giustificazione.

Secondo la concezione euristica, che la scoperta sia un processo razionale lungo e complesso viene spesso trascurato, e ciò è fonte di confusione.

1) Talora si confonde la scoperta con l'illuminazione improvvisa, come quando si dice che la scoperta riguarda il momento dell'eureka, ossia il momento in cui un'ipotesi appare all'improvviso per la prima volta. Nella scoperta «ciò che più colpisce sono queste apparizioni di illuminazioni improvvise, segni manifesti di un lungo lavoro inconscio anteriore» (Poincaré 1999, 50). È vero che questo lavoro inconscio è «impossibile, e in ogni caso non è fecondo, se da un lato non è preceduto, e dall'altro non è seguito, da un periodo di lavoro cosciente» (ivi, 51). Tuttavia la scoperta non consiste in tale lavoro cosciente, bensì nell'illuminazione improvvisa.

Ma, secondo la concezione euristica, in questo modo si trascura che la scoperta non può ridursi all'illuminazione improvvisa, perché è un processo lungo e complesso che comprende dentro di sé anche la giustificazione. Ciò spiega perché spesso non si sa dire esattamente dove, quando e da chi una scoperta è stata effettuata per la prima volta, neppure quando sono disponibili tutti i documenti pertinenti.

2) Talora si confonde la scoperta con il pensiero iniziale, come quando si dice che «l'espressione 'scoperta di' significa 'pensiero iniziale di'» (Kordig 1978, 114). La scoperta di un'ipotesi consiste nel pensarla inizialmente, perché coloro che scoprono «inizialmente si imbattono in idee, pensano ipotesi», queste «attraversano la loro mente» (*ibid.*). Il pensiero iniziale di un'ipotesi è dunque solo un fatto psicologico. In esso la logica non svolge alcun ruolo, perché «la giustificazione richiede ragioni», mentre «il pensiero iniziale no. Il pensiero iniziale è anteriore alla plausibilità e alla giustificazione», anzi «spesso non è né plausibile né giustificato. E talora non vuol neppure sembrare plausibile né giustificato (cfr. la fantasia deliberata). La logica perciò non è essenziale per il pensiero psicologico iniziale», e quindi «non è essenziale per la scoperta» (*ibid.*).

Ma, secondo la concezione euristica, in questo modo si trascura che la scoperta non può ridursi al pensiero iniziale, perché questo non costituisce ancora una scoperta. Per esempio, se un supervisore suggerisce ad un dottorando un'ipotesi per risolvere un problema e il dottorando riesce a mostrare che è corretta, la scoperta viene attribuita di solito al dottorando e non al supervisore, perché questi può aver suggerito l'ipotesi ma non ne ha mostrato la plausibilità.

3) Talora si confonde la scoperta col congetturare senza regole, come quando si dice di non credere «che esista un metodo sicuro per imparare a congetturare» (Pólya 1954, I, *vi*). È vero che la dimostrazione di

un teorema «si scopre col ragionamento plausibile, congetturando», quindi chi vuol fare della matematica la propria professione deve «imparare il ragionamento plausibile; questo è il tipo di ragionamento su cui si baserà il suo lavoro creativo» (*ibid.*). Ma per tale tipo di ragionamento non esistono regole. In effetti «l'uso efficiente del ragionamento plausibile è un'abilità pratica che viene appresa, come ogni altra abilità pratica, attraverso l'imitazione e la pratica», perciò l'unico modo di insegnarla è offrendo «esempi per l'imitazione e possibilità di pratica» (*ibid.*).

Ma, secondo la concezione euristica, in questo modo si trascura che, se la scoperta consiste nel congetturare senza regole, non si spiega come mai spesso la prima ipotesi formulata risulti adeguata. Per spiegarlo si può far appello al caso e alla buona fortuna, ma non è credibile che questi fattori siano decisivi in tutti i casi.

3. La natura dei metodi di scoperta

La seconda questione preliminare è: che cosa si deve intendere per metodo di scoperta delle ipotesi per risolvere i problemi?

Secondo la concezione euristica, un tale metodo di scoperta è qualsiasi procedura che aiuta a trovare le ipotesi. Non si richiede che la procedura sia puramente meccanica, né che si basi su un insieme di regole date una volta per sempre, né che si basi su regole probabilistiche. L'unica cosa che si richiede è che essa aiuti a trovare le ipotesi, anche se non ci dà la garanzia assoluta di farlo.

Secondo la concezione euristica, che un metodo di scoperta sia qualsiasi procedura che aiuta a trovare le ipotesi viene spesso trascurato, e ciò è fonte di confusione.

1) Talora si confondono i metodi di scoperta con le procedure meccaniche, come quando si dice che non può esistere una logica della scoperta perché «non vi sono regole logiche in termini delle quali si possa costruire una 'macchina per la scoperta' che rilevi la funzione creativa del genio», e perciò «non è compito del logico render conto delle scoperte scientifiche; tutto quello che egli può fare è analizzare la relazione tra fatti dati e una teoria a lui offerta con la pretesa che spiega questi fatti. In altri termini la logica si occupa solo del contesto della giustificazione» (Reichenbach 1951, 231).

Ma, secondo la concezione euristica, in questo modo si trascura che fin dall'antichità per metodo non si è intesa una procedura meccanica, bensì qualsiasi procedura che aiutasse a trovare le ipotesi per risolvere i problemi, pur senza dare la garanzia assoluta di farlo. Medicina e matematica furono i primi campi in cui si pose la necessità di un metodo per trovare le ipotesi, e i primi metodi di cui ci è giunta testimonianza, cioè il metodo della medicina di Ippocrate di Cos e il metodo della riduzione di problemi matematici di

Ippocrate di Chio, non erano procedure meccaniche. Per questo motivo Platone contrappone il metodo della medicina di Ippocrate di Cos alle pratiche mediche basate su procedure di routine o meccaniche, tramite le quali «non è possibile conoscere la natura del corpo» (Platone, *Phaedrus*, 270 c 4). Perciò è ingiustificato dire che la logica non può occuparsi del contesto della scoperta e deve limitarsi a quello della giustificazione perché non vi sono regole logiche meccaniche in termini delle quali si possa costruire una macchina per la scoperta che rilevi la funzione creativa del genio. Un metodo di scoperta non dev'essere necessariamente una procedura meccanica.

2) Talora si confondono i metodi di scoperta con le procedure basate su insiemi di regole date una volta per sempre, come quando si dice che «la logica della scoperta è già stata scoperta» (Hintikka 1985, 3). Essa è la «logica della ricerca dell'informazione attraverso il porre domande», che si basa su regole date da «una modesta estensione dei tableaux semantici di Beth» (ivi, 9). Il processo della scoperta può essere visto come un gioco a due persone di domande-risposte, che parte da un'assunzione iniziale, detta teoria, e dalla conclusione che si vuol dimostrare, e procede secondo tali regole. Scopo del gioco è stabilire se dalla teoria segue la conclusione.

Ma, secondo la concezione euristica, in questo modo si trascura che è ingiustificato identificare la logica della scoperta con una logica basata su un insieme di regole date una volta per sempre, perché vi sono numerosi esempi di processi di scoperta che non si basano su regole del genere, bensì su regole che vengono modificate o estese in corso d'opera.

3) Talora si confondono i metodi di scoperta con le procedure basate su regole probabilistiche, come quando si dice che la ragione per cui un'ipotesi viene formulata inizialmente può essere sussunta sotto la ragione per cui essa viene considerata giustificata. Ora, la ragione per cui un'ipotesi viene formulata inizialmente è la sua probabilità a priori, cioè la probabilità prima di ogni controllo empirico, perché la plausibilità iniziale di un'ipotesi si basa su «considerazioni riguardanti la valutazione di proprietà a priori» (Salmon 1967, 118). Invece, la ragione per cui un'ipotesi viene considerata giustificata è la sua probabilità a posteriori, cioè la sua probabilità in base ai controlli che sono stati effettuati, perché questa «è la probabilità che cerchiamo quando ci occupiamo della conferma delle ipotesi scientifiche» (ivi, 117). Ma per il teorema di Bayes la probabilità a posteriori di un'ipotesi dipende dalla sua probabilità a priori e dalla probabilità dell'evento. Perciò la ragione per cui un'ipotesi viene formulata inizialmente può essere sussunta sotto la ragione per cui essa viene considerata giustificata. Dunque «il teorema di Bayes fornisce lo schema logico appropriato per caratterizzare le inferenze volte a stabilire ipotesi scientifiche» (*ibid.*).

Ma, secondo la concezione euristica, in questo modo si trascura che in generale la ragione per cui un'ipotesi viene formulata inizialmente non è la sua probabilità a priori. Per esempio, quando Copernico propose l'ipotesi eliocentrica, questa non aveva una probabilità a priori maggiore di quella

dell'ipotesi geocentrica. Essa venne presa in considerazione non per la sua probabilità a priori ma in virtù di altre considerazioni, come la sua semplicità, generalità ed eleganza.

19
Le origini della concezione euristica

1. La necessità del metodo

Abbiamo detto che, secondo la concezione euristica, la filosofia deve occuparsi di come la matematica arriva a porre i propri problemi e a scoprire ipotesi per risolverli.

Ciò appare chiaro da Descartes, che propone una nuova filosofia da mettere «al posto di quella filosofia speculativa che si insegna nelle scuole» (Descartes 1996, VI, 61). Essa deve fornire alla matematica e alla scienza un «metodo generale per risolvere tutti i problemi che non sono ancora mai stati risolti» (ivi, I, 340).

Gli uomini, nel ricercare la verità, spesso procedono a caso e senza regole, come uno che «ardesse di tanta sciocca cupidigia di trovare un tesoro, da vagare continuamente per le strade, cercando se per caso non ne trovasse uno, perso da un viandante. Così operano quasi tutti i chimici, la maggior parte dei geometri, e non pochi filosofi» (ivi, X, 371). In questo modo, certo, essi trovano talora qualcosa di vero, ma non per questo sono «più industriosi, bensì soltanto più fortunati» (*ibid.*).

Secondo Descartes, invece, «bisogna guardarsi dal perder tempo ad indovinare cose del genere a caso e senza regole» perché, «anche se spesso tali cose possono essere scoperte senza regole, e dai fortunati talora persino più velocemente che mediante un metodo, tuttavia esse indebolirebbero il lume della mente, e lo abituerebbero a tal punto a cose puerili e inutili che in seguito rimarrebbe sempre attaccato alle superfici delle cose, e non potrebbe penetrare più a fondo» (ivi, X, 405). Addirittura, «è molto meglio non pensar mai a cercare la verità di alcuna cosa piuttosto che farlo senza un metodo» (ivi, X, 371).

Invece, si deve arrivare «alla verità delle cose» per mezzo di «regole certe, che giovano non poco al riguardo», delle quali poi si farà uso «per trovarne delle altre» (ivi, X, 403-404). Dunque, le cose devono «essere

investigate con metodo» (ivi, X, 404). La ragione umana per non smarrirsi deve badare al metodo «non meno di quanto si debba badare al filo di Teseo da chi sta per entrare in un labirinto» (ivi, X, 379-380). L'acquisizione della conoscenza richiede di seguire un ordine che spesso è «così oscuro e intricato che non tutti possono riconoscere quale esso sia» (ivi, X, 380). In tale situazione c'è da disperare che «la ragione umana basti a scoprire tali cose» (ivi, X, 398). Per scoprirle, essa deve seguire un metodo.

Il metodo deve basarsi su «regole certe e facili, tali che chiunque le osserverà esattamente non darà mai per vero nulla di falso e, senza consumare inutilmente alcuno sforzo della mente, ma aumentando sempre gradualmente il sapere, perverrà alla vera conoscenza di tutte le cose di cui sarà capace» (ivi, X, 371-372). Evitando l'errore, le regole devono guidare «la mente a proferire giudizi solidi e veri su tutte le cose che si presentano» (ivi, X, 359). Nelle regole «non rimane nulla di nascosto ed esse sono adeguate alle capacità della conoscenza umana», e ci offrono «nel modo più distinto innumerevoli ordinamenti, tutti diversi tra di loro e tuttavia regolari, nella cui retta osservanza consiste quasi tutta l'umana perspicacia» (ivi, X, 404).

Le regole devono permettere di «seguire tanto accuratamente e rendere così facili tutte le vie che sono aperte agli uomini per la conoscenza della verità, che chiunque abbia imparato alla perfezione tutto questo metodo, per mediocre che sia di ingegno, veda comunque che nessuna di esse è preclusa a lui piuttosto che ad altri» (ivi, X, 399-400). Grazie alle regole, chiunque potrà «trovare da sé, pur avendo un ingegno mediocre, tutto ciò che possono trovare gli ingegni più sottili» (ivi, X, 506). Esse, perciò, renderanno superfluo il genio. Non solo quest'ultimo non occorre per raggiungere la conoscenza di tutte le cose, ma «quelli che camminano assai lentamente, se seguono sempre la via diritta, possono avanzare molto di più di coloro che corrono e se ne allontanano» (ivi, VI, 2). I primi sono coloro che seguono un metodo, i secondi quelli che si basano sul proprio genio.

Per usare il metodo non occorreranno particolari doti, basterà la ragione, che è «la cosa meglio ripartita al mondo» (ivi, VI, 1). La ragione a cui si riferisce Descartes non è una facoltà astrattamente intesa ma è la ragione concreta. Essa è «naturalmente eguale in tutti gli uomini» perché, «essendo la sola cosa che ci rende uomini e ci distingue dalle bestie», è «tutta intera in ognuno» (ivi, VI, 2). Tra gli uomini «la diversità delle opinioni non deriva dal fatto che gli uni siano più ragionevoli degli altri», cioè posseggano la ragione in misura maggiore degli altri, ma «solamente dal condurre i nostri pensieri per vie diverse e dal non considerare le stesse cose» (*ibid.*).

2. Il metodo come logica

Per Descartes il metodo dev'essere una sorta di logica, o meglio, è la «vera logica» (ivi, III, 272).

La vera logica, infatti, non può essere la logica «della scuola perché, propriamente parlando, questa è soltanto una dialettica che insegna i mezzi per far intendere le cose che si sanno, o anche per dire senza discernimento molte parole intorno a quello che non si sa affatto, e così corrompe il buon senso invece di aumentarlo» (ivi, IX-2, 13). Essa si basa sulla sillogistica, che serve soltanto «a spiegare agli altri le cose che già si sanno» (ivi, VI, 17). È vero che la sillogistica «dimostra chiaramente tutto ciò che viene concluso» per mezzo di essa, strappando così «il consenso del lettore, per quanto recalcitrante e ostinato», ma essa «non soddisfa né sazia gli animi di coloro che sono desiderosi di apprendere, perché non insegna il metodo col quale una cosa è stata scoperta» (ivi, VII, 156). Coloro che si affidano alla sillogistica «non colgono nulla di nuovo» (ivi, X, 406).

Ciò dipende dal fatto che gli uomini «non possono formare con arte alcun sillogismo che concluda il vero se prima non ne avranno posseduto la materia, se cioè non avranno già prima conosciuto quella medesima verità che viene dedotta in esso» (*ibid*.). E la materia non può essere posseduta mediante la sillogistica ma dev'essere ottenuta per un'altra via. Perciò la sillogistica «è del tutto inutile per chi desidera indagare la verità delle cose, ma soltanto può giovare talora ad esporre agli altri più facilmente le ragioni già conosciute, e pertanto va trasferita dalla filosofia alla retorica» (*ibid*.).

La sillogistica pretende di prescrivere alla ragione «certe forme di ragionamento, che pervengono a conclusioni così necessarie, che la ragione», affidandosi a esse, «potrebbe tuttavia, in forza della forma, concludere qualcosa di certo» (ivi, X, 405-406). In realtà, invece, essa impone alla ragione solo costrizioni rigide ed inutili, e noi «ci accorgiamo che spesso la verità si sottrae a tali vincoli, laddove talora quegli stessi che se ne sono serviti vi rimangono impigliati» (ivi, X, 406).

Della sillogistica si può dire quello che si dice della sofistica, cioè che «anche i sofismi più sottili non sono soliti ingannare quasi mai nessuno che si serva della pura ragione, se non i sofisti stessi» (*ibid*.). Parimenti la sillogistica non riesce a convincere nessuno di una verità se non coloro che la conoscono già. Inoltre i mezzi che la sillogistica fornisce come aiuto alla ragione non solo sono inutili ma «sono addirittura da annoverare tra gli ostacoli, perché al puro lume della ragione non si può aggiungere nulla che in qualche modo non lo oscuri» (ivi, X, 372-373).

Perciò, secondo Descartes, «se vogliamo proporci seriamente delle regole con l'aiuto delle quali elevarci al culmine della conoscenza umana» (ivi, X, 364), la sillogistica dev'essere rimpiazzata da una nuova logica. Questa deve insegnare «a ben condurre la propria ragione per scoprire le verità che si ignorano» (ivi, IX-2, 13-14). Essa deve «estendersi alle verità che si possono estrarre da qualsiasi soggetto» (ivi, X, 374). Usandola io avrò «la sicurezza di far uso in tutto della mia ragione, se non in modo perfetto, almeno nel modo migliore in mio potere» (ivi, VI, 21).

La nuova logica deve dare un metodo per «risolvere tutti i problemi che possono proporsi per qualsiasi genere di quantità, sia continua che discreta», quindi tutti i problemi matematici, fino al punto che «quasi nulla rimanga più da scoprire» (ivi, X, 157). Nella misura in cui ci dà un tale metodo, essa è «più importante di ogni altra conoscenza a noi data umanamente, in quanto è la fonte di tutte le altre» (ivi, X, 374).

Ma la nuova logica non deve soltanto dare un metodo per risolvere tutti i problemi matematici, deve anche giustificare la certezza della conoscenza ottenuta mediante tale metodo. A tale scopo, essa deve mostrare le ragioni della sua certezza perché, anche se siamo persuasi che la conoscenza ottenuta mediante il metodo sia certa, nondimeno «c'è bisogno che noi ricerchiamo qui le ragioni che ce ne fanno avere una conoscenza certa» (ivi, IX-2, 63). Quindi la nuova logica dev'essere nello stesso tempo una logica della scoperta e una logica della giustificazione.

Secondo Descartes, la nuova logica deve differire dalla sillogistica sotto almeno quattro aspetti: rispetto al fine, all'ordine delle dimostrazioni, al punto di partenza della ricerca e alla modalità di formulazione delle regole.

1) Il fine che la nuova logica deve proporsi è quello di scoprire i principi. Essa deve servire a «trovare in generale i principi, o cause prime, di tutto ciò che è, o che può essere, nel mondo» (ivi, VI, 63-64). Dunque, mentre nella sillogistica ci si limita a dedurre conseguenze dei principi, nella nuova logica si devono trovare i principi stessi.

2) L'ordine delle dimostrazioni nella nuova logica dev'essere quello che risale dalla proposizione da dimostrare ai principi, perché non si può condurre la ricerca «se non procedendo dagli effetti alle cause» (ivi, VI, 64). Dunque, mentre nella sillogistica l'ordine delle dimostrazioni è quello che discende dai principi alla proposizione da dimostrare, nella nuova logica esso deve andare nella direzione opposta.

3) Il punto di partenza della ricerca nella nuova logica dev'essere la proposizione da dimostrare. Infatti «le cause vengono cercate a partire dagli effetti» (ivi, X, 434). Dunque, mentre nella sillogistica il punto di partenza della ricerca è costituito dai principi, nella nuova logica esso deve consistere nella proposizione da dimostrare.

4) La modalità di formulazione delle regole deve prevedere che queste non siano date dall'inizio, una volta per sempre, ma siano formulate mano a mano che si sviluppa la ricerca, sicché, una volta che questa sia conclusa, lo scopritore possa dire: «ogni verità che scoprivo era una regola che mi serviva in seguito a scoprirne delle altre» (ivi, VI, 20-21). Dunque, mentre nella sillogistica le regole della dimostrazione sono date una volta per sempre, nella nuova logica esse possono essere formulate mano a mano che si sviluppa la ricerca.

Descartes si rende conto che costruire una logica dotata di queste caratteristiche è un progetto immane, anzi «un'opera infinita, e non di una

sola persona. Un'opera tanto incredibile quanto ambiziosa» (ivi, X, 157). Ma ritiene di aver intravisto «non so quale luce nel caos oscuro di questa scienza», col cui aiuto «le tenebre più spesse potranno essere dissolte» (ivi, X, 157-158). Anzi, egli pensa di aver già costruito parzialmente la nuova logica, e spera di poterla costruire completamente a meno che non ne sia impedito «dalla brevità della vita o dalla scarsezza delle esperienze» (ivi, VI, 63). Perciò decide di pubblicare la parte già costruita come il «miglior rimedio contro questi due impedimenti» (*ibid*.). La pubblicazione di tale parte va intesa come un invito agli «uomini più dotati a tentare di andare oltre», perché così, «congiungendo le vite e gli sforzi di più persone, andremmo tutti insieme molto al di là di quanto ciascuno singolarmente potrebbe fare» (*ibid*.).

3. La natura del metodo

Nel lavoro di costruzione della nuova logica Descartes non parte, però, da zero, perché il metodo che egli invoca non è un'arte del tutto nuova: i geometri greci già la possedevano. Certo, non la possedevano completamente, come mostrano «le loro insane manifestazioni di esultanza e i sacrifici di ringraziamento per lievi scoperte», però la possedevano almeno in parte, e alcune sue tracce «sembrano apparire ancora in Pappo e Diofanto» (ivi, X, 376). Inoltre, nell'ultimo secolo «vi sono stati alcuni uomini di grandissimo ingegno», come Viète, che «si sono sforzati di ridestarla» (ivi, X, 377). Ma essi hanno dovuto riscoprirla, perché i geometri greci non ce l'hanno tramandata e sembra quasi che «l'abbiano nascosta ai posteri» (ivi, X, 373).

I geometri greci lo hanno fatto «per una sorta di perniciosa scaltrezza» (ivi, X, 376). Temendo che il metodo, una volta divulgato, avrebbe portato, per la sua semplicità, ad attribuire troppo poco valore alle loro scoperte, «preferirono esporci in suo luogo certe verità sterili abilmente dimostrate per via di deduzione» mediante il metodo sintetico, ossia assiomatico, presentandole «come effetti della loro arte, affinché li ammirassimo, piuttosto che insegnarci l'arte stessa, la quale avrebbe certo sottratto loro l'ammirazione» (ivi, X, 376-377). Che i geometri greci nei loro scritti si siano serviti solo del metodo sintetico non dipende dal fatto che essi non possedessero un'arte della scoperta, ma dal fatto che «ne facevano un così gran conto da riservarla per sé soli come un segreto» (ivi, VII, 156).

L'arte della scoperta dei geometri greci era invece il metodo analitico, «che essi estendevano alla soluzione di tutti i problemi» (ivi, X, 373). Secondo Descartes, il metodo analitico è un procedimento che «noi avremo osservato con esattezza se ridurremo gradualmente le proposizioni involute e oscure ad altre più semplici, e in seguito, dall'intuizione delle più semplici di tutte, tenteremo di risalire per gradi alla conoscenza di tutte le altre» (ivi, X, 379).

Le proposizioni semplici a cui si riducono le proposizioni complesse sono le cause di queste ultime, e viceversa queste sono il loro effetto, quindi la riduzione delle proposizioni complesse a quelle semplici è un risalire dagli effetti alle cause. Dunque il metodo analitico «fa vedere come gli effetti dipendono dalle cause» (ivi, IX-1, 121). In esso, inoltre, «le ragioni si susseguono in modo tale che, come le ultime ragioni sono dimostrate dalle prime che sono le loro cause, viceversa queste prime lo sono dalle ultime che sono i loro effetti» (ivi, II, 198). Quindi, gli effetti sono dimostrati dalle cause, e viceversa le cause sono dimostrate dagli effetti.

Questo, secondo Descartes, non comporta alcun circolo perché, dato che «l'esperienza rende certissima la maggior parte di questi effetti», le cause da cui essi sono dedotti «non servono tanto a dimostrarli quanto a spiegarli; al contrario, sono le cause che sono dimostrate dagli effetti» (ivi, VI, 76). Tuttavia, mostrare che un effetto può essere dimostrato mediante una certa causa diventa importante qualora quell'effetto «sia messo in dubbio e quella causa sia già stata dimostrata per mezzo di altri effetti» (ivi, II, 198). In tal caso la causa è dimostrata non soltanto dal fatto che essa ha quell'effetto, ma anche dal fatto che ha altri effetti che si accordano con l'esperienza, perché noi «siamo liberi di assumere qualsiasi cosa purché tutto ciò che ne deriva si accordi con l'esperienza» (ivi, VIII-1, 101).

Il fatto che, nei loro scritti, i geometri greci si siano serviti solo del metodo sintetico, ossia assiomatico, ha indotto ad identificare il metodo della matematica con tale metodo. Ma, secondo Descartes, il vero metodo della matematica è il metodo analitico. È vero che le dimostrazioni sintetiche dei geometri greci «in certo modo mettevano molte cose davanti agli occhi, dalle quali traevano conclusioni; ma per quale motivo le cose stessero così e in che modo venissero scoperte, essi non sembravano mostrarlo adeguatamente alla stessa mente» (ivi, X, 375).

Il metodo sintetico strappa subito «l'assenso del lettore, per quanto restio e ostinato; ma non soddisfa come l'altro, né appaga gli animi di coloro che sono desiderosi di imparare perché non ci insegna il modo in cui la cosa è stata scoperta» (ivi, VII, 156). Solo il metodo analitico «mostra la vera via attraverso cui una cosa è stata scoperta metodicamente e quasi a priori, sicché se il lettore vorrà seguirla e osserverà abbastanza tutte le cose, comprenderà la cosa così dimostrata non meno perfettamente, e la renderà non meno sua, che se l'avesse trovata lui stesso» (ivi, VII, 155).

Questo non significa che il metodo sintetico sia da buttar via. Esso presenta qualche vantaggio rispetto al metodo analitico. Per esempio, quest'ultimo «non ha nulla che possa costringere il lettore meno attento o riluttante a credere; infatti, se egli non presta attenzione alla sia pur minima cosa tra quelle che propone, non gli apparirà più la necessità delle sue conclusioni» (ivi, VII, 155-156). Invece il metodo sintetico, «per una via opposta e cercata per così dire a posteriori (sebbene in esso spesso la

dimostrazione sia più a priori che in quello), dimostra invero chiaramente ciò che viene concluso» (ivi, VII, 156). A tal fine esso «si serve di una lunga serie di definizioni, postulati, assiomi, teoremi e problemi», per mostrare, se si nega qualcuna delle conseguenze, «come questa sia contenuta negli antecedenti, e così strappa il consenso al lettore, per quanto riluttante e ostinato possa essere» (*ibid*.). Per questo motivo la sintesi «può essere messa molto acconciamente dopo l'analisi» (*ibid*.).

Ma, secondo Descartes, in quanto non ci insegna la via attraverso cui una cosa è stata scoperta, il metodo sintetico «non soddisfa completamente gli animi di coloro che sono desiderosi di imparare» (*ibid*.). Anzi esso è inferiore al metodo analitico non solo come metodo di scoperta ma anche come metodo di insegnamento, perché fa apparire le dimostrazioni come «scoperte più spesso per caso che in base ad un metodo», e così ha l'effetto negativo che «in qualche modo ci disabituiamo a servirci della stessa ragione» (ivi, X, 375).

Di fatto col metodo sintetico non si aggiunge nulla ai risultati già trovati col metodo analitico, ci si limita a riesporli in un altro ordine, con un processo che «può essere fatto da chiunque, anche dai meno attenti, purché soltanto si ricordino delle proposizioni precedenti» (ivi, VII, 157). Tale processo si limita a considerare le proposizioni date dal metodo analitico in direzione opposta, discendente invece che ascendente, e perciò è solo un banale esercizio. Per questo motivo nella sua *Géometrie* Descartes lo omette del tutto, e non si preoccupa neppure di dare la lista degli assiomi da cui dovrebbe partire la sintesi.

20
La concezione euristica e la certezza

1. Logica della scoperta e certezza

Secondo Descartes, la nuova logica non deve dare semplicemente un metodo per risolvere tutti i problemi, bensì un metodo che serva «a dare certezza e a rimuovere il terriccio mobile e la sabbia per trovare la roccia e l'argilla» (Descartes 1996, VI, 29). Esso deve assicurare «una convinzione tanto salda da non poter essere distrutta in alcun modo; e dunque una convinzione chiaramente identica alla certezza più perfetta» (ivi, VII, 145).

A questo riguardo Descartes respinge l'accusa di servirsi «di una certa analisi per mezzo della quale si possano rovesciare le vere dimostrazioni, o nascondere e abbellire quelle false così che esse non possano essere rovesciate da nessun altro» (ivi, VII, 446). Egli dichiara, al contrario, di non aver «mai cercato altro che quella analisi per mezzo della quale si può riconoscere la certezza delle ragioni vere, e si possono riconoscere i vizi di quelle false» (*ibid*.). L'analisi, ossia il metodo analitico, deve portare alla certezza.

La certezza a cui il metodo analitico deve portare è la certezza assoluta, quella che abbiamo «quando pensiamo che non è in alcun modo possibile che la cosa sia diversa da come la giudichiamo» (ivi, IX-2, 324). Una tale certezza è propria di «tutto quanto è dimostrato nella matematica; perché noi vediamo chiaramente che è impossibile che due e tre uniti insieme facciano più o meno di cinque, o che un quadrato non abbia che tre lati, e cose simili» (*ibid*.).

Caratteri costitutivi della certezza assoluta sono, per Descartes, la chiarezza e la distinzione. Una conoscenza «sulla quale si può stabilire un giudizio certo e indubitabile dev'essere non solo chiara ma anche distinta» (ivi, IX-2, 44). Una conoscenza è chiara quando «è presente e manifesta ad una mente attenta: come noi diciamo di vedere chiaramente gli oggetti quando, essendo presenti, agiscono abbastanza fortemente e i nostri occhi

sono disposti a guardarli» (*ibid.*). È distinta quando è chiara ed «è talmente precisa e differente da tutte le altre conoscenze da comprendere in sé soltanto ciò che appare manifestamente a chi la considera come si deve» (*ibid.*).

Le conoscenze chiare e distinte non lasciano alcun margine all'errore. Di esse «non possiamo dubitare se non pensiamo ad esse; ma non possiamo pensare ad esse se non crediamo nello stesso tempo che sono vere; perciò non possiamo dubitare di esse a meno che non crediamo nello stesso tempo che sono vere; cioè, non possiamo mai dubitare di esse» (ivi, VII, 145-146).

2. Intuizione e deduzione

Per far sì che il metodo analitico porti alla certezza assoluta, Descartes lo fonda sull'intuizione e sulla deduzione.

A suo parere, se esaminiamo «tutti gli atti del nostro intelletto mediante i quali possiamo giungere alla conoscenza delle cose senza alcun timore di ingannarci», vediamo che «ne sono ammessi soltanto due, cioè l'intuizione e la deduzione» (ivi, X, 368). Infatti «agli uomini non è aperta alcuna strada per la conoscenza certa della verità, tranne l'intuizione evidente e la deduzione necessaria» (ivi, X, 425). Queste «sono vie certissime per la scienza, né se ne devono ammettere di più da parte della mente, anzi tutte le altre devono essere respinte come sospette e soggette ad errori» (ivi, X, 370). Noi dobbiamo ricercare soltanto «ciò che possiamo intuire con chiarezza ed evidenza, o dedurre con certezza; infatti la scienza si acquista solo in questo modo» (ivi, X, 366). Perciò il metodo analitico deve fondarsi sull'intuizione e sulla deduzione.

Che cosa Descartes intenda per intuizione e per deduzione differisce dal «modo in cui questi vocaboli in questi ultimi tempi sono stati adoperati nelle scuole» (ivi, X, 369).

Per intuizione Descartes intende «quella facoltà di conoscere» che Dio «ci ha dato che noi chiamiamo lume naturale», e che «non vede mai alcun oggetto che non sia vero in quello che essa ne percepisce» (ivi, IX-2, 38). Infatti, tutto ciò che ci è «mostrato dal lume naturale non può in alcun modo essere dubbio» (ivi, VII, 38). Ma per Descartes l'intuizione non è soltanto una facoltà di conoscere bensì anche l'atto del conoscere, essendo «il pensiero non dubbio di una mente pura e attenta, che nasce dal solo lume della ragione» (ivi, X, 368).

Per deduzione Descartes intende, invece, qualunque passaggio da una proposizione ad un'altra: non soltanto il passaggio dalla causa all'effetto ma anche dall'effetto alla causa. Egli dice, infatti, che chi vuol scoprire la natura del magnete, «anzitutto raccoglie diligentemente tutti quei dati sperimentali che può avere su tale pietra, dai quali cerca poi di dedurre quale combinazione di nature semplici sia necessaria per produrre tutti quegli effetti

che ha sperimentato nel magnete» (ivi, X, 427). Qui la deduzione indica il passaggio dall'effetto (i dati sperimentali) alla causa (una combinazione di nature semplici), non quello dalla causa all'effetto. In generale, comunque, si può parlare di deduzione per indicare entrambi i passaggi. Perciò «noi diciamo che si possono dedurre» o «la causa dall'effetto, o l'effetto dalla causa» (ivi, X, 428). Non tutti i passaggi dalla causa all'effetto o dall'effetto alla causa, però, sono deduzioni ma solo quelli che sono certi, perché si può chiamare deduzione solo «ciò che viene concluso necessariamente a partire da altre cose conosciute con certezza» (ivi, X, 369).

Qual è, per Descartes, il ruolo dell'intuizione e della deduzione nel metodo analitico?

L'intuizione serve per conoscere le proposizioni semplici. Mediante essa noi possiamo «intuire le proposizioni semplici in modo distinto» (ivi, X, 410). Tali proposizioni «possono essere intuite dapprincipio e di per sé, non in dipendenza da alcun'altra» (ivi, X, 383). Essendo intuite, esse «non contengono mai nessuna falsità» (ivi, X, 420). Inoltre, le proposizioni semplici possono essere conosciute solo mediante l'intuizione, perché la loro «conoscenza è così perspicua e distinta che esse non possono essere divise dalla mente in più cose conosciute più distintamente» (ivi, X, 418). Perciò di esse non si può avere una conoscenza discorsiva ma soltanto una conoscenza intuitiva.

Inoltre, mediante l'intuizione le proposizioni semplici sono conosciute totalmente. Ci sbagliamo se talvolta giudichiamo che una proposizione semplice «non sia da noi conosciuta totalmente; infatti, se con la mente cogliamo anche un qualcosa di minimo su di essa», noi «la conosciamo totalmente; altrimenti infatti non potrebbe essere detta semplice» (*ibid.*). Per esempio, mediante l'intuizione noi conosciamo totalmente che «il triangolo è delimitato da tre linee soltanto, che la sfera è delimitata da un'unica superficie, e cose simili» (ivi, X, 368). Che, mediante l'intuizione, le proposizioni semplici siano conosciute totalmente significa che esse sono conosciute esaurientemente, senza lasciare residui oscuri o dubbi.

La deduzione, invece, serve per conoscere le proposizioni complesse a partire da quelle semplici. Infatti, le proposizioni complesse possono essere conosciute solo riducendole a queste ultime, ed è questa la funzione della deduzione. Ma essa ha anche un'altra funzione, perché una volta ridotte le proposizioni complesse a quelle semplici, possiamo passare dall'intuizione di queste alla conoscenza delle proposizioni complesse. Infatti, date le proposizioni semplici, «tutte le rimanenti proposizioni le concepiamo come in qualche modo composte da queste» (ivi, X, 418). Per passare dall'intuizione delle proposizioni semplici alla conoscenza di quelle complesse usiamo di nuovo la deduzione, perché le proposizioni complesse «non possono essere percepite altrimenti che se vengano dedotte da quelle» (ivi, X, 383). Inoltre mediante la deduzione le proposizioni complesse, «sebbene esse stesse non

siano evidenti, sono conosciute con certezza», essendo «dedotte da principi veri» (ivi, X, 369). Infatti, mediante la deduzione, «possiamo comporre le cose in modo tale da essere certi della loro verità» (ivi, X, 424).

Poiché, per Descartes, il metodo analitico consiste nel ridurre gradualmente, mediante la deduzione, le proposizioni involute e oscure a quelle semplici, che vengono conosciute mediante l'intuizione, e poi nel discendere, di nuovo mediante la deduzione, dalla conoscenza delle proposizioni semplici a quella delle proposizioni complesse, intuizione e deduzione sono il fondamento del metodo analitico.

3. Impossibilità di regole per l'intuizione e la deduzione

Ci si potrebbe attendere che, avendo dichiarato che le cose devono essere indagate col metodo analitico, Descartes fornisse regole per tale metodo. Invece non lo fa perché il metodo analitico, quale egli lo intende, si basa sull'intuizione e sulla deduzione, e queste, a suo parere, hanno un carattere così semplice e primitivo che per esse non possono darsi regole. Infatti, secondo Descartes non si può arrivare «ad insegnare in che modo si debbano fare queste operazioni medesime, perché esse sono le più semplici e le prime di tutte, cosicché, se il nostro intelletto non potesse già prima servirsene, non comprenderebbe nessun precetto del metodo, per quanto facile» (ivi, X, 372).

In particolare, l'intuizione è un'operazione dell'intelletto così immediata che non può essere ricondotta a nient'altro. Noi non impariamo ad usarla per mezzo di regole ma solo attraverso l'esercizio. Come «si debba far uso dell'intuizione della mente, lo apprendiamo» come «quegli artigiani che si impegnano in lavori minuti, e che si sono abituati a rivolgere con attenzione l'acume degli occhi a punti singoli», sicché «dall'uso acquistano la capacità di distinguere perfettamente le cose, per piccole e fini che siano» (ivi, X, 401). Nello stesso modo «diventano perspicaci coloro che non disperdono mai il pensiero su diversi oggetti insieme, ma lo occupano sempre tutto nel considerare cose semplicissime e facilissime» (*ibid.*). Essi sviluppano la loro capacità di intuizione non per mezzo di regole ma attraverso l'esercizio.

Anche per la deduzione non possono darsi regole, perché anch'essa si basa sull'intuizione. In realtà «l'evidenza e la certezza dell'intuizione non è richiesta soltanto per singole proposizioni, ma anche per ogni discorso. Si dia infatti, ad esempio, questa inferenza: $2+2$ fanno lo stesso di $3+1$; non solo si deve intuire che $2+2$ fanno 4, e che pure $3+1$ fanno 4, ma inoltre si deve intuire che da queste due proposizioni si conclude necessariamente quella terza proposizione» (ivi, X, 369). La deduzione consta, quindi, di una catena di intuizioni, e perciò si basa sull'intuizione.

Addirittura, secondo Descartes, la catena di intuizioni di cui consta una deduzione si riduce, in un certo senso, ad un'unica intuizione.

Infatti, per cogliere una deduzione, noi percorriamo tutti gli anelli della catena, «li passiamo in rassegna successivamente e ci ricordiamo che ciascuno di essi è unito ai due più vicini, dal primo all'ultimo» (ivi, X, 370). Grazie alla memoria possiamo sapere che l'ultimo anello della catena «è connesso col primo, anche se non contempliamo con una ed una medesima intuizione degli occhi tutti gli anelli intermedi da cui dipende quella connessione» (ivi, X, 369-370). Perciò alla deduzione «non è necessaria, come all'intuizione, un'evidenza attuale, ma piuttosto in un certo modo essa trae dalla memoria la sua certezza» (ivi, X, 370).

La memoria permette, però, di ricordare soltanto pochi anelli della catena per volta. Per ovviare a questa sua debolezza, noi ripercorriamo sempre più velocemente le intuizioni della catena per far sì che la memoria sia «richiamata e rafforzata con questo continuo e ripetuto movimento del pensiero» (ivi, X, 408). Le passiamo «in rassegna con un movimento continuo del pensiero che intuisce le singole cose e subito passa ad altre», finché abbiamo «imparato a passare così velocemente dalla prima all'ultima che, non lasciando quasi alcun ruolo alla memoria», ci sembri «di intuire l'intera cosa simultaneamente» (ivi, X, 388), cioè, ci sembri di intuire l'intera deduzione con un'unica intuizione.

Nel passare in rassegna le intuizioni della catena dobbiamo star attenti che non ne venga omessa alcuna. Perciò dobbiamo «fare dovunque delle enumerazioni così complete e delle revisioni così generali da essere sicuri di non omettere nulla» (ivi, VI, 19). Dunque dobbiamo non solo «percorrere, con un moto continuo e non mai interrotto del pensiero, una per una, tutte le cose che si riferiscono al nostro scopo», ma dobbiamo anche «comprenderle in una enumerazione sufficiente e ordinata» (ivi, X, 387).

Che, passando in rassegna le intuizioni della catena sempre più velocemente, alla fine ci sembri di intuire l'intera deduzione con un'unica intuizione, implica che, per Descartes, intuizione e deduzione sono atti dell'intelletto che non sono essenzialmente differenti. È vero che, mentre l'intuizione ha luogo «tutta simultaneamente e non in momenti successivi», la deduzione non ha luogo «tutta simultaneamente, ma comporta un certo movimento del nostro ingegno che inferisce una cosa dall'altra» (ivi, X, 407). Dunque l'intuizione differisce dalla deduzione perché «in questa si concepisce un moto ovvero una certa successione, mentre in quella no; ed inoltre perché a questa non è necessaria un'evidenza attuale, come lo è all'intuizione, ma essa piuttosto trae in un certo modo dalla memoria la sua certezza» (ivi, X, 370). Per questo motivo «a buon diritto l'abbiamo distinta dall'intuizione. Ma, se rivolgiamo l'attenzione ad essa una volta che sia ormai stata effettuata», allora la deduzione «non indica più il movimento, bensì il punto di arrivo del movimento, perciò supponiamo che sia colta mediante l'intuizione» (ivi, X, 407-408). Pertanto tra intuizione e deduzione non esistono differenze di principio.

4. La rinuncia a una logica della scoperta

Poiché la deduzione consta di una catena di intuizioni che si riducono, in un certo senso, ad un'unica intuizione, in ultima analisi Descartes fonda il metodo analitico sull'intuizione. Egli lo fa perché ritiene che «solo nell'intuizione delle cose, sia semplici che complesse, non può esservi falsità» (ivi, X, 432). Soltanto essa ci dà la certezza assoluta.

Ma, fondando il metodo analitico sull'intuizione, Descartes finisce per compromettere il suo tentativo di sviluppare una logica della scoperta, perché per l'intuizione non si danno regole, trattandosi di un'operazione così immediata che non può essere ricondotta a nient'altro e che perciò può essere appresa solo attraverso l'esercizio. Di conseguenza il metodo analitico, quale Descartes lo intende, procede «senza logica, senza regole, senza schemi argomentativi, col solo lume della ragione e del buon senso, che là dove opera da solo e di per sé, è inficiato da meno errori che quando si studia ansiosamente di osservare mille regole differenti» (ivi, X, 521).

Per questo motivo Descartes dice che il metodo analitico «consiste più in una pratica che in una teoria» (ivi, I, 349). E dichiara di non voler affatto «insegnare il metodo che ciascuno deve seguire per ben condurre la propria ragione», ma di voler soltanto mostrare come egli ha condotto la propria, presentando tale resoconto «soltanto come una storia, o, se si preferisce, come una favola, in cui, in mezzo ad alcuni esempi da imitare, se ne troveranno forse molti altri che si avrà ragione di non seguire» (ivi, VI, 4).

Ma in questo modo Descartes rinuncia a sviluppare una vera logica della scoperta. Egli si limita a dare alcuni precetti molto generali, come: non accogliere che verità evidenti di per sé e indubitabili, ammettendo soltanto ciò che si presenta alla mente «in modo così chiaro e distinto da non offrire alcuna occasione di essere revocato in dubbio»; scomporre un problema «in quante più parti sarebbe possibile, e che sarebbero richieste per meglio risolverlo»; partendo dalle parti così ottenute, che sono gli oggetti più semplici e più facili da conoscersi, «risalire poco a poco, come per gradi, alla conoscenza dei più complessi»; passare in rassegna tutto ciò che è necessario per il proprio scopo, facendo «sempre enumerazioni tanto complete, e rassegne così generali, da avere la certezza di non omettere nulla» (ivi, VI, 18-19).

Tali precetti sono così generali che, come osserva beffardamente Leibniz, manca poco che li si possa dire «simili al precetto di non so quale chimico: prendi ciò che devi e fa quel che devi, e otterrai quel che vuoi» (Leibniz 1965, IV, 329). Precetti del genere non possono servire da regole per una logica della scoperta. In effetti, «di tante belle scoperte che sono state fatte dopo Descartes, non ve n'è nessuna che provenga da un vero cartesiano», per cui, nonostante le pretese dei cartesiani, «o Descartes non

conosceva il vero metodo, oppure non glielo ha trasmesso» (ivi, IV, 297). Ma, se non glielo ha trasmesso, Descartes si è macchiato della stessa colpa che egli attribuiva ai geometri greci, che, pur conoscendo l'arte della scoperta, non l'hanno tramandata ai posteri.

All'origine del fallimento del tentativo di Descartes di sviluppare una logica della scoperta, sta la sua assunzione che una tale logica debba portare alla certezza. Contrariamente a quanto ritiene Descartes, nella concezione euristica la certezza non sta alla logica della scoperta nello stesso rapporto in cui, nella concezione fondazionalista, essa sta alla logica della giustificazione. Mentre per quest'ultima è essenziale che la logica della giustificazione miri alla certezza, per la concezione euristica è inessenziale, anzi improprio, che la logica della scoperta lo faccia. Di fatto, assumendo che la logica della scoperta debba mirare alla certezza, Descartes ha finito per compromettere il suo tentativo di svilupparne una.

21
L'ampliatività dell'inferenza

1. L'abbandono del mito della certezza

Il fallimento del tentativo di Descartes di sviluppare una logica della scoperta ripropone la questione se una tale logica sia possibile.

Come abbiamo visto, ciò viene negato dalla concezione fondazionalista. Essa obietta che i processi attraverso cui i matematici arrivano alle loro scoperte sono puramente soggettivi, perciò analizzandoli non si può mai arrivare a quella certezza che è propria della matematica. Dunque una logica della scoperta è impossibile. Invece i risultati delle scoperte dei matematici sono un fatto oggettivo. Essi si fondano su presupposti che possono essere indagati, perciò analizzandoli si può arrivare a mostrare la base della certezza della matematica. Dunque una logica della giustificazione è possibile.

Alla luce delle difficoltà a cui va incontro la concezione fondazionalista questa obiezione, però, appare mal posta.

Anzitutto, l'obiezione assume, senza darne alcuna prova, che i processi attraverso cui i matematici arrivano alle loro scoperte sono puramente soggettivi. Ma alcuni matematici ci hanno fornito un resoconto di come sono arrivati alle loro scoperte, da cui risulta che le hanno ottenute mediante processi razionali oggettivi e comunicabili.

In secondo luogo, l'obiezione assume che la logica debba portare alla certezza, e ne conclude che, poiché non può farlo, una logica della scoperta è impossibile, mentre, poiché può farlo, una logica della giustificazione è possibile. Ma questa assunzione è ingiustificata perché, per i teoremi di incompletezza di Gödel e per tutte le altre ragioni che abbiamo già discusso, neppure una logica della giustificazione può portare alla certezza.

L'impossibilità di portare alla certezza non è un limite della logica della scoperta a cui si sottrae la logica della giustificazione, ma è una condizione a cui è soggetta tutta la logica. Quindi non è illusorio soltanto

credere, come fa Descartes, che una logica della scoperta possa portare alla certezza, ma è anche illusorio credere, come fanno Kant e Hilbert, che una logica della giustificazione possa portare alla certezza. Perciò o nessuna logica è possibile, oppure non si può richiedere che una logica, della scoperta o della giustificazione, porti alla certezza.

Dunque, che una logica della scoperta non possa portare alla certezza non è un limite peculiare di tale logica né dipende dal suo presunto basarsi su processi puramente soggettivi, ma è una condizione a cui è soggetta tutta la logica e con cui essa deve convivere.

2. Il paradosso dell'inferenza

Che una logica della scoperta non possa portare alla certezza è una conseguenza del cosiddetto paradosso dell'inferenza, che può essere formulato nel modo seguente.

> Se in un'inferenza la conclusione non è contenuta nelle premesse, essa non può essere corretta. Se in un'inferenza la conclusione non contiene qualcosa di essenzialmente nuovo rispetto alle premesse, essa non può essere ampliativa. Ma in un'inferenza la conclusione non può, nello stesso tempo, essere contenuta nelle premesse e contenere qualcosa di essenzialmente nuovo rispetto ad esse. Dunque un'inferenza non può, nello stesso tempo, essere corretta e ampliativa.

Questa formulazione del paradosso dell'inferenza richiede alcune precisazioni.

1) In essa, 'inferenza' significa 'inferenza deduttiva', e 'inferenza corretta' significa 'inferenza in cui la verità delle premesse è una condizione sufficiente per la verità della conclusione'.

2) 'Se in un'inferenza la conclusione non è contenuta nelle premesse, essa non può essere corretta', non significa che in un'inferenza corretta la conclusione è contenuta nelle premesse come una loro parte, ma solo che la conclusione è implicita nelle premesse e può essere ricavata da esse esplicitando ciò che è implicito in esse. Che in un'inferenza corretta la conclusione sia implicita nelle premesse dipende dal fatto che, se non lo fosse, la verità delle premesse non sarebbe una condizione sufficiente per la verità della conclusione ma quest'ultima dipenderebbe da condizioni aggiuntive, per cui l'inferenza non sarebbe corretta.

3) 'Se in un'inferenza la conclusione non contiene qualcosa di essenzialmente nuovo rispetto alle premesse, essa non può essere ampliativa', significa che in un'inferenza ampliativa la conclusione contiene informazione

essenzialmente nuova rispetto alle premesse, cioè informazione che non è implicita nelle premesse e che non può essere ricavata da esse esplicitando ciò che è implicito in esse.

Che il paradosso dell'inferenza implichi che una logica della scoperta non può portare alla certezza segue dal fatto che una logica che portasse alla certezza dovrebbe basarsi su inferenze corrette. D'altra parte, una logica della scoperta deve basarsi su inferenze ampliative, cioè su inferenze la cui conclusione contiene informazione essenzialmente nuova rispetto alle premesse. Ma, per il paradosso dell'inferenza, le inferenze non possono essere, nello stesso tempo, corrette e ampliative. Dunque una logica della scoperta, dovendo basarsi su inferenze ampliative, non può portare alla certezza. Essa deve «prendere, tra le ipotesi formulate dagli uomini, quella che sia almeno la migliore e la meno vulnerabile alle critiche, e su essa, come su una zattera, affrontare il rischio di navigare attraverso il mare della vita» (Platone, *Phaedo*, 85 c 8-d 2).

3. La non-ampliatività dell'inferenza corretta

La tesi che l'inferenza non possa essere, nello stesso tempo, corretta e ampliativa, è stata ripetutamente riproposta nella storia del pensiero, da Sesto Empirico a Wittgenstein.

In particolare, come abbiamo visto, secondo Descartes un'inferenza corretta non può essere ampliativa perché gli uomini non possono formare alcun sillogismo che concluda il vero se prima non ne hanno posseduto la materia, se cioè non hanno già prima conosciuto quella verità che viene dedotta in esso, e tale verità non può essere conosciuta mediante la sillogistica ma solo per un'altra via. Perciò la sillogistica è inutile per chi vuole scoprire nuove verità, ma può soltanto giovare talora ad esporre ad altri verità già conosciute.

D'altra parte, secondo Kant, un'inferenza corretta non può essere ampliativa perché la logica prescinde da ogni contenuto della conoscenza. Per ottenere una nuova conoscenza si deve uscire fuori dal concetto e considerare il suo rapporto con l'oggetto. Ma, mediante la logica, non si può uscire fuori dal concetto perché, quando lo si fa, la logica non produce che illusioni. Allora, infatti, essa si riferisce ad un particolare contenuto della conoscenza, e perciò perde quel carattere di necessità e di certezza che le deriva dal far astrazione da ogni contenuto.

4. Obiezioni contro la non-ampliatività

Contro la tesi che l'inferenza non possa essere, nello stesso tempo, corretta e ampliativa, sono state avanzate varie obiezioni, che però ad un attento esame risultano implausibili. Ne esamineremo alcune.

1) Secondo Rota, l'inferenza corretta può essere ampliativa perché la conclusione di un'inferenza, sebbene sia implicita nelle premesse, può essere estratta da esse solo con un grande sforzo. È vero che, anche se «la verità dei teoremi di una teoria matematica raramente viene vista solo guardando fissamente gli assiomi», nondimeno «la verità di tutti i teoremi 'in linea di principio' può essere 'trovata' negli assiomi» (Rota 1997, 109). Quindi i teoremi «sono 'in definitiva', 'in linea di principio', 'essenzialmente' tautologici», nel senso che essi «devono risultare evidenti dagli assiomi, che l'intricata successione di inferenze sillogistiche con cui dimostriamo un teorema, o con cui comprendiamo il teorema di un altro, è soltanto un puntello temporaneo che deve, prima o poi, permetterci di vedere infine la conclusione come una conseguenza inevitabile degli assiomi» (ivi, 110). Nondimeno, anche se i teoremi matematici sono essenzialmente tautologici, «queste tautologie richiedono quasi sempre strenui sforzi per essere dimostrate» (ivi, 109). In questo senso esse contengono qualcosa di nuovo rispetto agli assiomi.

Questo argomento trascura, però, che il compito di ottenere teoremi, addirittura tutti i possibili teoremi, dagli assiomi, non richiede alcuno strenuo sforzo, perché può essere eseguito da un computer mediante l'algoritmo del British Museum.

Lo stesso Rota sembra riconoscere i limiti del suo argomento quando afferma che, anche se «le dimostrazioni di teoremi matematici, come quella del teorema dei numeri primi, sono ottenute a costo di grande sforzo intellettuale», esse «vengono ridotte gradualmente a delle banalità» (ivi, 118). La prima dimostrazione di un teorema è sostituita da un'altra più semplice, e così via. Questo processo «di semplificazione, che trasforma una dimostrazione di cinquanta pagine in un argomento di mezza pagina», mostra che «la difficoltà originaria di un teorema matematico, la difficoltà con cui lottiamo quando ci illudiamo di aver 'scoperto' un nuovo teorema, è dovuta in realtà solo alla fragilità umana, una fragilità che qualche mente più forte dissiperà ad una data successiva, mostrandoci una banalità che non eravamo riusciti a riconoscere» (*ibid.*). Di fatto «la comunità dei matematici non cesserà il suo lavoro da castoro su un nuovo risultato scoperto, finché non avrà mostrato con generale soddisfazione che tutte le difficoltà nelle prime dimostrazioni erano spurie, e alla fine del cammino si troverà soltanto una banalità analitica», per cui «ogni teorema matematico alla fine risulta banale» (*ibid.*).

2) Secondo Hintikka, l'inferenza corretta può essere ampliativa perché in un'inferenza, «nel passare dalle premesse alla conclusione, spesso dobbiamo considerare individui che non sono menzionati nelle premesse», cioè «il passaggio dalle premesse alla conclusione non può essere effettuato senza l'aiuto di individui che non sono considerati nelle premesse» (Hintikka 1973, 192). Per questo motivo, ad esempio, «l'inferenza da 'tutti sono

mortali' a 'Socrate è mortale' può senz'altro essere concepita come sintetica nel senso che Kant aveva in mente», perché introduce nella conclusione il termine 'Socrate' che «è un rappresentante di un individuo, e perciò è un'intuizione nel senso di Kant» (ivi, 194). In generale «i passi sintetici sono quelli in cui vengono introdotti nell'argomentazione nuovi individui» (ivi, 210). Essi sono sintetici, ossia ampliativi, perché introducono nella conclusione un'intuizione.

Questo argomento si basa, però, sull'assunzione che, per Kant, nella teoria dell'inferenza i giudizi singolari (come 'Socrate è mortale') debbano essere trattati diversamente da quelli universali (come 'tutti sono mortali'). Ma al contrario Kant dichiara inequivocabilmente che, «nell'uso dei giudizi nei sillogismi, i giudizi singolari possono essere trattati come quelli universali. Infatti, proprio perché essi non hanno alcuna estensione, il loro predicato non può essere riferito soltanto a qualcosa di ciò che è contenuto sotto il concetto del soggetto ma escluso da altro. Esso dunque vale per quel concetto senza eccezione, proprio come se questo fosse un concetto universale, che avesse un'estensione per il cui intero significato vale il predicato» (Kant 1900- , III, 87). Per esempio, il giudizio singolare «Dio è senza difetti» può essere trattato come il giudizio universale «tutto ciò che è Dio è senza difetti» (ivi, XVI, 648). Di conseguenza, il giudizio singolare 'Socrate è mortale' può essere trattato come il giudizio universale 'tutto ciò che è Socrate è mortale'. Dunque per Kant l'inferenza da 'tutti sono mortali' a 'Socrate è mortale' non introduce nella conclusione alcuna intuizione.

Ma l'argomento di Hintikka è insostenibile anche sotto un altro aspetto. L'inferenza da 'tutti sono mortali' a 'Socrate è mortale' ha la forma,

$$(1) \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \forall x A(x)\end{array}}{A(t)}.$$

Ora, una dimostrazione della premessa $\forall x A(x)$ di (1) contiene già implicitamente una dimostrazione della conclusione $A(t)$. Infatti, per il teorema di normalizzazione di Prawitz, ogni dimostrazione «può essere scritta in forma normale, cioè può essere rappresentata da una dimostrazione normale» (Prawitz 1971, 258). Quindi possiamo supporre senza perdere in generalità che la dimostrazione della premessa $\forall x A(x)$ di (1) sia una dimostrazione normale. Ma una dimostrazione normale di $\forall x A(x)$ ha la forma,

$$\begin{array}{c} \vdots \\ A(a) \\ \hline \forall x A(x) \end{array} \quad (2)$$

Perciò, sostituendo nella dimostrazione della premessa $A(a)$ di (2) la variabile a con t, si ottiene una dimostrazione di $A(t)$. Dunque una dimostrazione della premessa di (1) contiene già implicitamente una dimostrazione della conclusione $A(t)$.

Questo non è che un caso particolare del fatto generale che «la conclusione ottenuta mediante un'eliminazione non afferma niente di più di quanto dev'essere già stato ottenuto se la premessa maggiore dell'eliminazione è stata inferita mediante un'introduzione» (ivi, 246). Perciò «una dimostrazione della conclusione di un'eliminazione è già 'contenuta' nelle dimostrazioni delle premesse quando la premessa maggiore è inferita mediante un'introduzione» (ivi, 246-247).

3) Secondo Dummett, l'inferenza corretta può essere ampliativa perché «comporta il riconoscimento di schemi comuni a pensieri differenti, schemi che stanno lì per essere riconosciuti» (Dummett 1991, 305). In particolare, essa richiede di estrarre predicati complessi dalle proposizioni e di metterli in relazione tra di loro. Per esempio, supponiamo di definire il predicato ternario '*x* è di grandezza intermedia tra *y* e *z*' come: 'o *y* è più grande di *x* e *x* è più grande di *z*, oppure *z* è più grande di *x* e *x* è più grande di *y*'. Allora, «per inferire la conclusione 'c'è un corpo di grandezza intermedia tra Giove e Marte'» dalla premessa «'o Giove è più grande di Nettuno e Nettuno è più grande di Marte, oppure Marte è più grande di Nettuno e Nettuno è più grande di Giove'», noi «dobbiamo poter riconoscere che tale predicato ternario complesso può essere estratto» dalla premessa, cioè dobbiamo poter «riconoscere in essa tale schema» (ivi, 41-42). Poiché l'inferenza «comporta riconoscere schemi nei pensieri espressi e metterli in relazione tra loro» e questi schemi «non vengono necessariamente riconosciuti», l'inferenza «è fruttuosa; ma, poiché tali schemi stanno lì per essere riconosciuti», la correttezza dell'inferenza «non è in discussione» (ivi, 42).

Questo argomento, però, è difettoso, perché fa dipendere l'ampliatività dell'inferenza da qualcosa che la precede e che non ha nulla a che fare con essa, cioè l'analisi della forma delle proposizioni. Rispetto ad un'analisi data, l'inferenza corretta non è ampliativa. L'ampliatività non risiede, quindi, nell'inferenza, ma nel processo mediante il quale si analizza la forma delle proposizioni. Essa, perciò, non si colloca, come ritiene Dummett, nel passaggio dalle premesse dell'inferenza alla conclusione, ma in una fase anteriore.

5. La necessità di estendere l'ambito della logica

Si è detto che una logica della scoperta deve basarsi su inferenze ampliative, cioè su inferenze la cui conclusione contiene qualcosa di essenzialmente nuovo rispetto alle premesse. Una tale logica deve portare, infatti, a nuove conoscenze. Ma allora, per il paradosso dell'inferenza, le regole di una logica della scoperta non possono essere corrette. Dunque una tale logica non può portare alla certezza.

Ciò implica che una logica della scoperta non può basarsi su inferenze deduttive. Infatti, le inferenze deduttive sono di regola corrette: possono essere scorrette soltanto per sbaglio. Ma allora, di nuovo per il paradosso dell'inferenza, esse non possono essere ampliative. Quindi, poiché una logica della scoperta deve basarsi su inferenze ampliative, queste devono essere non-deduttive. Di conseguenza una logica della scoperta deve basarsi su inferenze non-deduttive.

Dunque l'ambito della logica dev'essere esteso includendovi non soltanto, come vuole la concezione fondazionalista, le inferenze deduttive, ma anche le inferenze non-deduttive. Il prezzo da pagare per tale estensione è che una logica della scoperta non può portare alla certezza. Ma questo prezzo dev'essere pagato non soltanto da una logica della scoperta ma anche da una logica della giustificazione. Anch'essa, infatti, non può portare alla certezza.

L'assunzione di Descartes che una logica della scoperta debba portare alla certezza è stata il principale ostacolo allo sviluppo di una tale logica. Ma per il paradosso dell'inferenza questa assunzione è ingiustificata. Di fatto metodi di scoperta che non portano alla certezza, come il metodo analitico, sono stati usati con successo dai matematici fin dall'antichità, nonché dai fisici a partire dalla rivoluzione scientifica del Seicento.

Dunque, abbandonando l'assunzione di Descartes che una logica della scoperta debba portare alla certezza, si rimuove un inutile ostacolo al suo sviluppo. Inoltre, poiché una logica della scoperta è essenziale per la concezione euristica, rinunciando a tale assunzione si rimuove anche un inutile ostacolo alla sua fattibilità.

22
Il metodo analitico

1. L'infinità della ricerca delle ipotesi

Una volta eliminate le pregiudiziali contro una logica della scoperta, sorge il problema di sviluppare una tale logica. Secondo la concezione euristica la base appropriata per tale sviluppo è data dal metodo analitico, che fin dall'antichità è stato considerato il metodo di scoperta per eccellenza.

Il metodo analitico è il procedimento secondo cui, per risolvere un problema, lo si analizza e, in base a tale analisi, si formula un'ipotesi. L'ipotesi costituisce una condizione sufficiente per la soluzione del problema, ma è essa stessa un problema che dev'essere risolto. Per risolverlo si procede nello stesso modo, cioè lo si analizza e, in base a tale analisi, si formula una nuova ipotesi. E così via con un processo potenzialmente infinito.

Il passaggio da un problema ad un'ipotesi che costituisce una condizione sufficiente per la sua soluzione si configura come la riduzione di un problema ad un altro, dove «la riduzione è il passaggio da un problema o un teorema ad un altro attraverso il quale, se noto o acquisito, diverrà evidente anche quello che si propone» (Proclo 1992, 212.24-213.2).

Ogni passo del processo di riduzione stabilisce nuove relazioni tra il problema e la conoscenza esistente, come è necessario dal momento che risolvere un problema richiede in generale di oltrepassare i suoi confini, per esplorare le relazioni tra esso e altri problemi.

La conoscenza esistente svolge un ruolo essenziale nella scoperta delle ipotesi. Naturalmente, essa non costituisce una base sufficiente per trovare nuove ipotesi, perché queste vanno al di là della conoscenza esistente. Ma nessuna nuova ipotesi può essere trovata senza partire dai dati, e i dati per trovare le ipotesi sono i fatti della conoscenza esistente, per esempio i problemi già risolti.

Inoltre la conoscenza esistente costituisce anche la base per valutare la plausibilità di un'ipotesi. Infatti, la plausibilità consiste nella compatibilità con la conoscenza esistente. Per valutare se un'ipotesi è plausibile si

esaminano le ragioni pro e contro di essa, questo esame viene condotto basandosi su fatti che avvalorano l'ipotesi o la screditano, e tali fatti appartengono alla conoscenza esistente. Perciò la plausibilità di un'ipotesi consiste nella sua compatibilità con la conoscenza esistente.

Poiché la conoscenza esistente svolge un ruolo essenziale nella scelta delle ipotesi, tale scelta non avviene in un mondo chiuso ma in un mondo aperto in cui il problema viene messo in rapporto con altri sistemi di conoscenze. La scelta delle ipotesi stabilisce relazioni tra il dato problema e altri apparentemente privi di nessi con esso.

Inoltre, la scelta delle ipotesi non è mai definitivamente giustificata. Infatti, in primo luogo, ogni ipotesi è essa stessa un problema che dev'essere risolto, e viene risolto attraverso la formulazione di una nuova ipotesi. In secondo luogo, la conoscenza esistente è in continua espansione e le ipotesi devono essere continuamente confrontate con essa. L'introduzione di nuove ipotesi e il loro confronto con la conoscenza esistente conducono ad un approfondimento del problema.

Poiché la scelta delle ipotesi non è mai definitivamente giustificata, non esiste un'ipotesi ultima. Di conseguenza la ricerca delle ipotesi è un processo potenzialmente infinito.

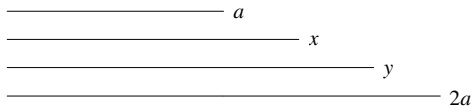
2. Il metodo della riduzione

Dal momento che nel metodo analitico il passaggio dal problema ad un'ipotesi che costituisce una condizione sufficiente per la sua soluzione si configura come una riduzione di un problema ad un altro, il metodo analitico è anche detto metodo della riduzione. Di fatto i primi esempi di uso del metodo analitico che ci sono stati tramandati, e che sono dovuti ad Ippocrate di Chio, hanno la forma di una riduzione. Ne esamineremo due.

1) Ippocrate di Chio ridusse il problema della duplicazione del cubo, ossia il problema, 'Dato un cubo, costruire un altro cubo di volume doppio rispetto a quello dato', al problema di trovare due medi proporzionali in proporzione continua tra due rette, specificamente tra due rette una delle quali è il doppio dell'altra.

Egli si accorse, infatti, che un cubo sarebbe stato duplicato se si fosse arrivati a trovare tali due medi proporzionali. Perciò assunse come ipotesi:

(A) Si possono sempre prendere due medi proporzionali, x e y, in proporzione continua tra la linea a (il lato del cubo) e la linea $2a$, cioè tali che $a:x=x:y=y:2a$.

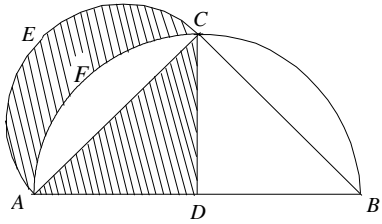


Infatti da $a:x=x:y=y:2a$ segue che $ay=x^2$ e $xy=2a^2$, da cui dividendo membro a membro si ottiene $a:x=x^2:2a^2$, donde $x^3=2a^3$. Dunque x è il lato del cubo duplicato. Così il problema della duplicazione del cubo di lato a viene ridotto all'ipotesi (A).

L'ipotesi (A) non è affatto evidente. Perciò, con questo procedimento, Ippocrate di Chio trasformò un problema in un altro non meno problematico.

2) Ippocrate di Chio ridusse il problema della quadratura di certe lunule, ossia il problema, 'Data una lunula, costruire una figura di superficie eguale ad essa e della quale si sa calcolare la superficie', al problema se i cerchi stanno tra loro come i quadrati sui loro diametri.

Per esempio, egli si accorse che si sarebbe potuto quadrare la lunula $AECF$ ottenuta tracciando un semicerchio ABC sulla base di un triangolo rettangolo isoscele e tracciando un semicerchio ACE su uno degli altri due lati, se si fosse arrivati a stabilire che i cerchi stanno tra loro come i quadrati sui loro diametri.



Perciò assunse come ipotesi:

(B) I cerchi stanno tra loro come i quadrati sui loro diametri.

Infatti, per il teorema di Pitagora, $AB^2 = AC^2 + CB^2 = 2 \cdot AC^2$. Da ciò e da (B) segue che $(\text{semicerchio } ABC) = 2 \cdot (\text{semicerchio } ACE)$, donde $(\text{quarto di cerchio } ADC) = (\text{semicerchio } ACE)$. Togliendo al quarto di cerchio ADC e al semicerchio ACE la parte comune, ossia il segmento circolare AFC, si ottiene $(\text{lunula } AECF) = (\text{triangolo } ACD)$. Così il problema della quadratura della lunula viene ridotto all'ipotesi (B).

L'ipotesi (B) non è affatto evidente. Perciò, con questo procedimento, Ippocrate di Chio trasformò un problema in un altro non meno problematico.

3. Il metodo delle ipotesi

Poiché nel metodo analitico la soluzione di un problema richiede che si formuli un'ipotesi, il metodo analitico è anche detto metodo delle ipotesi. Di fatto la prima teorizzazione esplicita del metodo analitico che ci è stata tramandata, e che è dovuta a Platone, lo configura come un metodo delle ipotesi.

Secondo Platone, se io voglio risolvere un problema, devo «rifugiarmi in certe ipotesi e considerare in queste la verità delle cose che sono» (Platone, *Phaedo*, 99 e 5-6). Se vi sono più ipotesi alternative, devo procedere «prendendo come ipotesi, in ciascuna occasione, quella proposizione che giudico essere più solida» (ivi, 100 a 3-4). Questo mi richiede di confrontare le ipotesi con la conoscenza esistente, e di scegliere tra più ipotesi quella che, alla luce della conoscenza esistente, appare la più solida.

Una volta scelta un'ipotesi, non devo andare avanti senza aver prima «esaminato tutte le conseguenze che ne derivano, per vedere se queste si accordano o non si accordano tra di loro» (ivi, 101 d 4-5). Anche quando le conseguenze si accordano, cioè non sono contraddittorie tra di loro, questo non significa che l'ipotesi sia corretta. Infatti se, nel formulare l'ipotesi, «si è commesso un primo pur piccolo e impercettibile errore», può anche darsi che tutte le proposizioni che ne «seguono, per quanto numerose, siano coerenti tra loro» (Platone, *Cratylos*, 436 d 2-3). Perciò «è necessario meditare a lungo ed esaminare attentamente il fondamento di ogni questione, per vedere se l'ipotesi è corretta oppure no; dopo aver esaminato questo in modo accurato, il resto apparirà conseguente ad esso» (ivi, 436 d 6-7).

Dunque, anche se le ipotesi «sembrano credibili, bisogna comunque riesaminarle ancor più scrupolosamente» (Platone, *Phaedo*, 107 b 6). Questo significa che ogni ipotesi dev'essere fondata a sua volta. Per fondarla «tu dovresti procedere nello stesso modo, cioè ponendo un'ulteriore ipotesi, quella che ti sembrasse la migliore tra quelle che sono più elevate» (ivi, 101 d 6-7).

Questo processo di risalita all'indietro, di ipotesi in ipotesi, deve proseguire finché si arriva ad un'ipotesi che si giudica soddisfacente. Quando questo si verifica, almeno per il momento «non dovrete cercare oltre» (ivi, 107 b 9). Ma l'ipotesi costituisce comunque un problema che prima o poi dev'essere risolto assumendo una nuova ipotesi. E così via all'infinito, perché non si arriva mai ad un'ipotesi ultima, ad un principio non più ipotetico. Ciò dipende dai nostri limiti conoscitivi, che non ci consentono di raggiungere

mai la pienezza della conoscenza. Infatti, «finché possediamo il corpo e la nostra anima rimane invischiata in quest'elemento malvagio, noi non otterremo mai adeguatamente il possesso di quello che ardentemente desideriamo, cioè la verità» (ivi, 66 b 5-7). Per questo motivo il processo di ricerca delle ipotesi è potenzialmente infinito.

È vero che Platone dice che il processo della risalita all'indietro continua fino a che si arriva «a ciò che non è più ipotetico, al principio di tutto e, dopo averlo raggiunto, attenendosi alle cose che dipendono da esso, discende fino alla conclusione ultima» (Platone, *Respublica*, VI 511 b 6-8). Ma per lui il principio di tutto può essere raggiunto solo dopo che l'anima si è liberata dal corpo. Per questo motivo l'anima, nel cercare la soluzione di un problema, non può partire dal principio di tutto ma «è costretta a servirsi di ipotesi, senza attingere al principio, perché non può trascendere le ipotesi» (ivi, VI, 510 a 4-6). Finché essa non si è liberata dal corpo, il principio di tutto costituisce solo un limite verso cui l'anima può tendere ma che non può mai raggiungere. Perciò, un po' paradossalmente, Platone afferma che il miglior modo per raggiungere la piena conoscenza è «esercitarsi a morire e ad essere morti» (Platone, *Phaedo*, 64 a 6).

Il fatto che per Platone si debbano cercare sempre nuove ipotesi implica, come osserva Natorp, che per lui il processo della soluzione di problemi è necessariamente un continuo «ampliamento, un continuo procedere» (Natorp 1923, 18). In esso si ha «un regresso all'infinito da premesse a premesse sempre più fondamentali, di validità sempre egualmente condizionata» (ivi, 15).

Ogni nuova ipotesi conduce ad un approfondimento del problema originario, quindi la soluzione di un problema è «lo svolgersi di un'idea dalla domanda non fino alla risposta conclusiva, ma verso domande sempre più radicali; l'apertura della via dell'interrogare verso l'illimitato approfondimento del problema» (ivi, 16).

Quando poniamo come inizio un'ipotesi, questa rimane sempre un inizio provvisorio, e dovremo comunque «risalire oltre questo inizio non appena se ne dia l'occasione e la possibilità» (ivi, 15). Ogni inizio provvisorio richiede un nuovo sviluppo, perciò si può parlare «di un regresso all'infinito da premesse a premesse sempre più fondamentali, di validità sempre egualmente condizionata» (*ibid.*). Dunque la soluzione di un problema «consiste in un processo infinito» (ivi, 13).

4. Metodo analitico contro metodo assiomatico

Il metodo analitico è alternativo rispetto al metodo assiomatico. Di ciò Platone è pienamente consapevole, come si vede dal fatto che egli conduce una serrata critica contro il metodo assiomatico.

Secondo Platone, coloro che praticano tale metodo usano le ipotesi in modo improprio, perché «le danno per scontate, in quanto principi assiomatici, e non credono che sia necessario renderne conto né a se stessi né ad altri, dal momento che le considerano del tutto evidenti. Poi, partendo da queste ipotesi e sviluppando le conseguenze, giungono al risultato che cercavano» (Platone, *Respublica*, VI 510 c 6-d 3). In quanto danno per scontate le ipotesi, essi non le fondano e perciò, anche se «comprendono qualcosa dell'essere», tuttavia «sembra quasi che sonnecchino, sono incapaci di vederlo in stato di veglia, nella misura in cui lasciano immobili le ipotesi di cui si servono senza poterne rendere ragione» (ivi, VII 533 b 8-c 3).

Di conseguenza, «poiché si basano sulle ipotesi senza cercare di risalire al principio, essi non raggiungono la piena intelligenza dell'oggetto di cui si occupano, anche se le loro conclusioni dipendono sempre da un principio» (ivi, VI 511 c 8-d 2). Inoltre, poiché non fondano le ipotesi, queste diventano semplici convenzioni, per cui anche ciò che si dimostra a partire da esse diventa una convenzione. Ma «da una tale artificiosa convenzione com'è possibile che scaturisca una scienza?» (ivi, VII 533 c 4-5).

Invece il metodo analitico «interpreta le ipotesi non come principi ma come ipotesi in senso proprio, cioè come gradini e punti di appoggio» (ivi, VI 511 b 5-6). Si intende, come gradini e punti di appoggio non per scendere ma per salire: per salire verso ipotesi sempre più generali e comprensive. Soltanto tale metodo «procede in questa direzione, togliendo di mezzo le ipotesi, verso il principio stesso, per trovarvi la propria giustificazione; e soltanto esso estrae a poco a poco l'occhio dell'anima dal fango barbarico in cui era sepolto e lo dirige verso l'alto» (ivi, VII 533 c 9-d 2). Perciò soltanto esso è propriamente un metodo.

Il metodo assiomatico, invece, non può dirsi propriamente un metodo perché, invece di cercare ipotesi sempre più generali e comprensive, interrompe arbitrariamente il processo della ricerca, assume come punti di partenza ipotesi che non giustifica e chiama verità ciò che segue da esse. Ma, derivando da ipotesi ingiustificate, anche ciò che segue da esse risulta ingiustificato.

Il metodo assiomatico è ciò che si ottiene dal metodo analitico quando si arresta arbitrariamente ad un certo punto il processo della risalita all'indietro, e si considera l'ipotesi a cui si è arrivati in quel punto come non bisognosa di giustificazione. Ma questo contraddice la natura stessa delle ipotesi, per la quale le ipotesi richiedono sempre una giustificazione.

5. La fortuna del metodo analitico

Il metodo analitico ha svolto un ruolo centrale nella matematica greca. Ciò viene trascurato dai sostenitori della concezione fondazionalista che, come osserva Knorr, tipicamente assumono «che preoccupazioni metamatematiche

fossero l'effettiva forza causale sottostante agli sforzi dei geometri» greci, «per esempio che il segno distintivo della loro tradizione fosse l'organizzazione di risultati geometrici in rigide strutture di ragionamento deduttivo, come se la loro principale ambizione fosse la produzione di trattati quali gli *Elementi* di Euclide e le *Coniche* di Apollonio» (Knorr 1993, 7).

Ma «certamente questo non può essere corretto. La scrittura di manuali è la fine della ricerca matematica», la fine non nel senso che ne è il risultato finale, bensì «solo nel senso in cui la morte è la fine della vita: è l'ultimo termine di una successione, ma non è l'elemento pertinente che spiega perché ci si impegni nell'attività di percorrere i passi di tale successione» (*ibid.*). Con l'unica eccezione di Eudosso, il centro dell'interesse «dei geometri antichi non è costituito da queste preoccupazioni formali, ma piuttosto dall'indagine dei problemi» (*ibid.*). E, nell'indagine dei problemi, il metodo analitico svolge un ruolo cruciale.

Oltre che nella matematica greca, il metodo analitico ha svolto un ruolo cruciale anche nella matematica e nella scienza della natura dal Cinquecento al Settecento. Per esempio, esso sta alla base del metodo dell'algebra di Viète, del metodo della geometria di Descartes e del metodo della fisica di Newton. Inoltre, nel periodo in questione esso ha occupato un posto importante nella riflessione filosofica.

Dopo di allora, però, il metodo analitico è quasi completamente scomparso dalla riflessione filosofica, e la sua eclissi si è protratta fino ai nostri giorni, quasi con l'unica eccezione di Pólya. Tale eclissi ha coinciso con l'affermarsi della concezione fondazionalista, che ha messo al centro della riflessione filosofica il problema della giustificazione di conoscenze già acquisite, escludendo da essa quello della scoperta di nuove conoscenze.

Lo stesso Pólya, in realtà, non si richiama al metodo analitico di Ippocrate di Chio e di Platone ma al metodo analitico-sintetico di Pappo, che è semplicemente una tecnica euristica per trovare dimostrazioni all'interno di un sistema assiomatico dato. Infatti, parafrasando Pappo, Polya afferma che, per risolvere un problema, noi «partiamo da ciò che è richiesto» e «indaghiamo da quali antecedenti potrebbe essere derivato il risultato desiderato», poi «indaghiamo quale potrebbe essere l'antecedente di quell'antecedente», e così via finché «arriviamo a qualcosa di già noto» (Pólya 1990, 227-229). Cioè, arriviamo ad un assioma, a una definizione o a una proposizione già dimostrata a partire dagli assiomi e dalle definizioni. Così, «seguendo il metodo analitico, lavorando all'indietro, abbiamo scoperto la successione di operazioni appropriata» (ivi, 229). A questo punto «tutto ciò che rimane da fare è invertire il processo, partendo dal punto che abbiamo raggiunto da ultimo nell'analisi», e in questo modo, «ripercorrendo i nostri passi, riusciamo finalmente a derivare ciò che era richiesto» (ivi, 230).

Che il punto che abbiamo raggiunto da ultimo nell'analisi sia un assioma, una definizione o una proposizione già dimostrata a partire dagli

assiomi e dalle definizioni significa che, per Pólya, il metodo analitico è una tecnica euristica per trovare dimostrazioni all'interno di un sistema assiomatico dato. Quello che si ottiene invertendo il processo è una dimostrazione assiomatica.

In effetti per Pólya il vero metodo della matematica è il metodo assiomatico. A suo parere l'umanità ha appreso l'idea di dimostrazione rigorosa «da un solo matematico e da un solo libro: da Euclide e dai suoi *Elementi*», che offrono «ancora la migliore occasione di acquisire l'idea di dimostrazione rigorosa» (ivi, 215). Negli *Elementi* «ogni proposizione è concatenata con gli assiomi, le definizioni e le proposizioni precedenti mediante una dimostrazione» (ivi, 217). Invece il metodo analitico è solo un metodo euristico con finalità pedagogiche. Esso «ha scopi pratici; una migliore comprensione delle operazioni mentali tipicamente utili per risolvere problemi potrebbe esercitare una certa buona influenza sull'insegnamento, specialmente sull'insegnamento della matematica» (ivi, 130).

Sebbene il metodo analitico sia quasi completamente scomparso dalla riflessione filosofica, questo non significa che esso sia scomparso dalla matematica. Al contrario, esso ha continuato ad esservi usato tacitamente, sebbene spesso inconsapevolmente. Un esempio recente è dato dalla dimostrazione di Wiles dell'ultimo teorema di Fermat, che si basa sulla riduzione di Ribet del teorema alla congettura di Taniyama-Shimura, una riduzione che rivela profonde connessioni tra l'algebra delle equazioni diofantee e la geometria delle curve ellittiche. Questa riduzione non è altro che un'applicazione del metodo analitico di Ippocrate di Chio e di Platone.

23
L'opposizione al metodo analitico

1. L'infondatezza delle ipotesi

Contro il metodo analitico sono state avanzate varie obiezioni, che però ad un attento esame risultano implausibili. In seguito ne considereremo alcune.

Una prima obiezione è che il metodo analitico non riesce a fondare le ipotesi, perché è vero che «vi sono ipotesi e congetture nella matematica così come ve ne sono nell'astronomia; ma, mentre le ipotesi di questi due tipi possono essere confutate deducendone conseguenze e dimostrandole false, quelle matematiche non possono essere stabilite semplicemente mostrando che le loro conseguenze sono vere» (Dummett 1993, 431). In matematica, «se supponiamo che l'ipotesi è vera, ne cerchiamo una dimostrazione e, fino a quando non ne troviamo una, essa rimane una mera ipotesi, che perciò sarebbe ingiustificato asserire» (*ibid.*). Infatti, «se si deve stabilire l'ipotesi, ciò non dev'essere fatto controllandone le conseguenze, ma mostrando che essa è una conseguenza di ciò che già conosciamo» (*ibid.*).

Questa obiezione, però, trascura che nel metodo analitico la giustificazione di un'ipotesi non sta solo nelle sue conseguenze ma sta soprattutto nella sua compatibilità con la conoscenza esistente, che ne garantisce la plausibilità. Inoltre, identificare la giustificazione di un'ipotesi con l'esistenza di una dimostrazione è un argomento che si morde la coda. La dimostrazione di un'ipotesi stabilisce che essa è una conseguenza di ciò che conosciamo già. Ma ciò che conosciamo già non può essere giustificato a causa dei risultati di incompletezza di Gödel e per le altre ragioni che già sappiamo. Dunque, considerare l'esistenza della dimostrazione di un'ipotesi come una condizione sufficiente per la sua giustificazione è illusorio.

2. L'algoritmicità delle ipotesi

Un'altra obiezione è che il metodo analitico non è un metodo di scoperta in senso proprio perché, per esserlo, dovrebbe fornirci un algoritmo per enumerare tutte le ipotesi per risolvere un problema dato. Ma un tale algoritmo non esiste perché non è «in nostro potere ottenere un'enumerazione completa delle cause possibili» (Leibniz 1969, 284). Cioè, non è in nostro potere enumerare tutte le ipotesi per risolvere un problema dato.

Questa obiezione, però, trascura che, se trovare un'ipotesi per risolvere un problema B significa trovare una proposizione A da cui B è deducibile, allora esiste un semplice algoritmo, quello del British Museum, per enumerare tutte le ipotesi per risolvere un problema dato. Infatti, il problema di trovare una proposizione A da cui B è deducibile equivale a quello di trovare una proposizione $\neg A$ deducibile da $\neg B$. Ora l'algoritmo del British Museum elenca in un ordine sistematico fissato tutte le deduzioni da un insieme di premesse date, quindi anche tutte le proposizioni deducibili da quell'insieme di premesse. Perciò esso enumera tutte le proposizioni deducibili da $\neg B$, quindi in particolare anche tutte le proposizioni della forma $\neg A$ deducibili da $\neg B$.

3. La necessità dell'intuizione e della divinazione

Un'altra obiezione è che il metodo analitico non è un metodo razionale perché, per trovare le ipotesi, esso richiede l'intuizione e la divinazione. L'attività della mente che si esplica in esso «non è la dimostrazione ma l'intuizione. Il geometra che analizza ottiene per divinazione la premessa da cui segue la conclusione» (Robinson 1936, 467). Quindi «aveva ragione Proclo quando descriveva l'analisi in termini che ricordano la via all'in su della dialettica nell'argomento di Platone della linea divisa, dal momento che tale via è una serie di intuizioni» (*ibid.*).

Questa obiezione, però, assume che esista una fondamentale asimmetria tra il metodo analitico e il metodo assiomatico. Mentre il metodo assiomatico ci fornisce regole per trovare le proposizioni deducibili da premesse date, il metodo analitico non ci dà alcuna regola per trovare le premesse da cui è deducibile una conclusione data. Tali premesse possono trovarsi solo mediante l'intuizione e la divinazione. Ma questa assunzione è infondata. Come abbiamo detto, esiste un semplice algoritmo, quello del British Museum, per enumerare tutte le proposizioni deducibili da un insieme di premesse date, e quindi anche per trovare le premesse da cui è deducibile una conclusione data. Perciò è ingiustificato dire che il metodo analitico non ci dà alcuna regola per trovare le premesse da cui è deducibile una conclusione data.

4. Il regresso all'infinito

Un'altra obiezione è che il metodo analitico è impossibile perché comporta un regresso all'infinito. In base ad esso, infatti, per risolvere un problema si introduce un'ipotesi, per stabilire la validità di tale ipotesi si introduce un'altra ipotesi, e così via all'infinito. Ma la serie delle ipotesi deve fermarsi ad un certo punto perché, «se non si fermasse e invece vi fosse sempre un termine più elevato del termine assunto, si potrebbe dimostrare qualsiasi cosa» (Aristotele, *Analytica Posteriora*, A 22, 84 a 1-2). In tal caso, infatti, nessuna ipotesi sarebbe mai assolutamente giustificata.

Questa obiezione, però, assume che, poiché nel processo della risalita all'indietro non si arriva mai ad un'ipotesi ultima ma ogni ipotesi dev'essere giustificata mediante un'altra ipotesi (per cui nessuna ipotesi è mai assolutamente giustificata), si può prendere come ipotesi qualsiasi cosa, e quindi si può dimostrare qualsiasi cosa. Ma questa assunzione è ingiustificata. Infatti, nel metodo analitico la scelta delle ipotesi non è arbitraria, perché è sempre soggetta alla condizione che le ipotesi devono essere compatibili con la conoscenza esistente, o direttamente oppure indirettamente attraverso le loro conseguenze logiche. Quindi non si può dimostrare qualsiasi cosa.

5. Il cammino infinito

Un'altra obiezione è che il metodo analitico è inapplicabile perché, per applicarlo, occorrerebbe percorrere un cammino infinito. Infatti, richiedendo di passare dal problema ad un'ipotesi, da questa ad un'altra ipotesi e così via, esso presuppone che si possa percorrere una serie infinita di termini. Ma questo è impossibile, perché «non si può percorrere una serie infinita di termini» (ivi, A 22, 84 a 2-3). Perciò col metodo analitico «non conosceremo mediante dimostrazione le proposizioni dimostrabili» (ivi, A 22, 84 a 3-4).

Questa obiezione, però, assume che, poiché il nostro intelletto, a causa dei suoi limiti, non è in grado di percorrere un cammino infinito, il metodo analitico non è utilizzabile dall'uomo. Ora, come osserva Natorp, è vero che «con le capacità finite dell'intelletto possiamo compiere solo un percorso finito. Ma ne segue che anche il percorso è necessariamente finito?» (Natorp 1923, 16). In realtà è errato supporre che «la via della conoscenza, se è infinita, debba essere preclusa in ogni senso alla nostra conoscenza in quanto questa è finita» (*ibid.*). Che risolvere un problema richieda di percorrere un cammino infinito non esclude che possiamo percorrerne tratti finiti sempre più lunghi, esclude soltanto «che questo compito infinito possa essere risolto definitivamente, che la strada infinita possa essere percorsa interamente» (ivi, 16-17).

6. L'unicità delle ipotesi

Un'altra obiezione è che il metodo analitico non ci dà alcuna salda dimostrazione, perché la stessa conclusione può seguire da diverse ipotesi una soltanto delle quali è vera, e il metodo analitico non ci dice quale di esse è quella vera. Un'ipotesi è «simile alla chiave di una crittografia» (Leibniz 1969, 283). Come «si può scrivere intenzionalmente una lettera in modo che essa possa essere compresa in base a parecchie chiavi differenti, una soltanto delle quali è quella vera», così «lo stesso effetto può avere diverse cause» (*ibid.*). Quindi la stessa conclusione può seguire da diverse ipotesi, una soltanto delle quali è quella vera. Per poter stabilire quale di esse è quella vera non basta supporre che, quanto più grande è il numero dei fatti «che possono essere spiegati da un'ipotesi, tanto più probabile essa è» (*ibid.*). Infatti, poiché un'ipotesi falsa spiega qualsiasi fatto, «dal successo delle ipotesi non si può ricavare alcuna salda dimostrazione» (*ibid.*). Per poter stabilire quale delle ipotesi è quella vera occorre un altro criterio, ma il metodo analitico non lo fornisce.

Questa obiezione, però, trascura che per il metodo analitico nessuna ipotesi è vera ma è soltanto plausibile, che la stessa conclusione può seguire da diverse ipotesi più di una delle quali può essere plausibile, e che il metodo analitico fornisce un criterio per stabilire quali ipotesi sono plausibili (quelle compatibili con la conoscenza esistente).

Alla base dell'obiezione vi è il pregiudizio che la conoscenza matematica sia infallibile. È a causa di esso che chi propone questa obiezione afferma che provvisoriamente può anche essere «utile applicare ipotesi meno perfette finché non se ne presenti una migliore, ossia una che spieghi gli stessi fenomeni più felicemente o più fenomeni con la stessa felicità» (*ibid.*). Ma queste ipotesi sono soltanto «dei sostituti della verità» (*ibid.*). La verità può essere raggiunta soltanto attraverso il metodo assiomatico, perché la dimostrazione «è il ragionamento con cui qualche proposizione viene resa certa. Ciò accade quando si mostra che essa segue necessariamente da alcune assunzioni (che si prendono per certe)» (Leibniz 1965, I, 194). E una proposizione viene resa certa solo col metodo assiomatico, mostrando che essa segue da assunzioni certe.

Ma questo pregiudizio è ingiustificato. A causa dei risultati di incompletezza di Gödel e per le altre ragioni che già sappiamo, nessuna proposizione può essere resa certa col metodo assiomatico.

7. La località

Un'altra obiezione è che il metodo analitico è inferiore al metodo sintetico perché è un metodo locale, non globale, quindi non serve per risolvere ogni problema, ma «risale ai principi soltanto per risolvere un dato problema» (ivi, VII, 297). Perciò esso non può essere usato per costruire un'intera scienza. Soltanto «il metodo sintetico è idoneo per coloro che vogliono edificare le

scienze» (Leibniz 1966, 90). Chi vuole edificarle si accontenterà di usare il metodo analitico solo quanto basta, e per il rimanente userà il metodo sintetico. Così «avanzerà sempre felicemente e agevolmente, non avvertirà mai alcuna difficoltà né rimarrà deluso del risultato, e in breve tempo otterrà molto di più di quanto mai sperasse dall'inizio» (Leibniz 1965, VII, 297).

Questa obiezione, però, trascura che un metodo di scoperta, per essere utile, dev'essere applicabile non soltanto in linea di principio ma anche in pratica. Se si tiene conto di questo, allora non è affatto vero che chi usa il metodo sintetico avanzerà sempre felicemente e agevolmente e in breve tempo otterrà molto di più di quanto mai sperasse dall'inizio. Infatti, per il carattere globale del metodo assiomatico, gli assiomi di una teoria assiomatica devono servire per risolvere ogni problema della teoria, non sono volti a risolvere un problema specifico, e perciò possono essere molto inefficienti quando vengono applicati ad un particolare problema. Come mostra l'esperienza della dimostrazione automatica, il carattere globale del metodo assiomatico rende la soluzione di un problema molto lunga e spesso non fattibile in pratica.

Al contrario, a causa del carattere locale del metodo analitico, le ipotesi non devono servire per risolvere ogni problema ma soltanto un problema specifico, e perciò possono essere molto efficienti. L'efficienza è essenziale perché può fare la differenza per la fattibilità in pratica della soluzione di un problema

8. La modularità

Un'altra obiezione è che, mentre il metodo assiomatico permette di riutilizzare i lemmi usati nella dimostrazione di un teorema, e in questo senso è modulare, il metodo analitico non lo consente, e quindi non è modulare. Per risolvere un problema esso risale ai principi «come se nulla fosse già stato scoperto, da parte nostra o di altri», perciò «con l'effettuare un'analisi per particolari problemi spesso rifacciamo un lavoro già fatto» (*ibid.*). Il metodo assiomatico, invece, consente di riutilizzare il lavoro fatto. Perciò «è meglio produrre una sintesi, perché questo lavoro vale una volta per sempre» (*ibid.*). Riutilizzare il lavoro fatto «richiede un'arte minore che non fare tutto da sé effettuando un'analisi, specialmente perché ciò che è stato scoperto da altri, o da noi stessi, non sempre ci viene in mente o è a portata di mano» (*ibid.*).

Questa obiezione, però, si basa su una svista. Non solo il metodo analitico permette di riutilizzare il lavoro già fatto, ma per certi versi è più modulare del metodo assiomatico. In quest'ultimo, infatti, per rendere modulare una dimostrazione, si deve separare il ruolo svolto in essa dai vari tipi di assiomi. Ma questo, in generale, è impossibile perché spesso i ruoli degli assiomi sono così mescolati tra loro da non poter essere separati nettamente. Questa è una conseguenza del fatto che gli assiomi sono globali,

devono servire per risolvere ogni problema e, per ragioni di praticità, in un sistema assiomatico si deve assumere il minor numero possibile di assiomi. Invece il metodo analitico, essendo volto a risolvere uno specifico problema, consente più facilmente di trovare le ipotesi adatte ad esso, e quindi facilita la modularità.

24
I vantaggi del metodo analitico

1. La spiegazione della soluzione dei problemi

A dispetto dei suoi critici, il metodo analitico presenta numerosi vantaggi rispetto al metodo assiomatico. In seguito ne considereremo alcuni.

Un primo vantaggio del metodo analitico è che, a differenza del metodo assiomatico, esso rende conto del modo in cui si perviene alla soluzione dei problemi.

Tale modo viene nascosto dal metodo assiomatico, che non rivela la via seguita nella ricerca perché ne presenta solo il risultato finale, non i passi attraverso cui è stato ottenuto. L'occultazione di tali passi determina una perdita sostanziale, perché essi sono essenziali per la comprensione del risultato, e la loro assenza dalla presentazione finale rende la matematica più difficile.

Invece il metodo analitico mostra la via seguita nella ricerca. Esso non soltanto è il metodo della scoperta matematica ma, a differenza del metodo assiomatico, permette di presentare i risultati matematici in un modo che corrisponde a quello in cui sono stati scoperti. Invece di seguire il metodo assiomatico nel nascondere, a svantaggio della conoscenza, la via seguita nella scoperta, esso la esplicita, e così ci dà una piena conoscenza delle modalità di soluzione del problema.

Perciò sembra ingiustificato dire, come fa Laugwitz, che sebbene la conoscenza matematica si sviluppi «normalmente col metodo analitico piuttosto che con qualche schema rigido fornito nel modo del metodo sintetico», tuttavia quest'ultimo «è vitale per il consolidamento e per la trasmissione della conoscenza nella forma dei manuali» (Laugwitz 2000, 178). Al contrario, in quanto nascondono la via seguita dalla ricerca, i

manuali basati sul metodo assiomatico trasmettono soltanto una conoscenza parziale e distorta.

Lo stesso Laugwitz ce ne dà una conferma indiretta quando, dopo aver osservato che «Cauchy fece ricorso all'analogia quando estese risultati sulle funzioni continue ai suoi integrali singolari», giustamente afferma che, «se egli si fosse attenuto al rigore nel senso ristretto dei manuali, il suo lavoro di ricerca degli anni 1820 non sarebbe mai stato scritto» (ivi, 189).

2. La produzione di nuova informazione

Un altro vantaggio del metodo analitico è che, a differenza del metodo assiomatico, esso rende ragione del fatto che la soluzione di problemi dà nuova informazione.

Nel metodo assiomatico risolvere un problema di un dato campo della matematica vuol dire dedurne la soluzione dagli assiomi di quel campo, dove l'informazione è già contenuta implicitamente in questi ultimi poiché, per il paradosso dell'inferenza, la deduzione non produce alcuna informazione essenzialmente nuova rispetto agli assiomi. Per questo motivo, per il metodo assiomatico «è stato a lungo un enigma come possa accadere che, da un lato, la matematica è per sua natura puramente deduttiva e trae le sue conclusioni apoditticamente, mentre dall'altro lato essa si presenta come una serie di scoperte altrettanto ricca e apparentemente interminabile di qualsiasi scienza osservativa» (Peirce 1931-58, 3.363).

L'enigma si risolve solo abbandonando l'assunzione del metodo assiomatico che la matematica sia puramente deduttiva e tragga le sue conclusioni apoditticamente. Questa assunzione è respinta dal metodo analitico, per il quale nella matematica l'inferenza non serve per dedurre dagli assiomi proposizioni che sono già contenute implicitamente in essi, bensì per trovare ipotesi per risolvere problemi, e perciò dev'essere un'inferenza non-deduttiva. Le ipotesi che si trovano mediante tale inferenza non sono contenute già implicitamente nella conclusione ma vanno al di là di essa, e perciò danno nuova informazione.

3. L'interazione con la conoscenza esistente

Un altro vantaggio del metodo analitico è che, a differenza del metodo assiomatico, esso rende ragione del fatto che la soluzione di problemi comporta un'interazione con la conoscenza esistente.

Nel metodo assiomatico risolvere un problema di un dato campo della matematica vuol dire dedurne la soluzione dagli assiomi di quel campo. Pertanto la soluzione di problemi ha il carattere di un monologo, perché rimane interamente all'interno di un dato sistema assiomatico, senza comportare alcuno scambio di informazione, quindi alcun dialogo, con altri

sistemi. Ciò è una conseguenza del fatto che il metodo assiomatico assume che tutta la conoscenza relativa ad un dato campo della matematica possa essere rappresentata in un unico sistema assiomatico. Dal punto di vista di tale metodo, perciò, per risolvere un problema di quel campo della matematica, non è necessario né legittimo usare informazione esterna a tale sistema assiomatico.

Questo contraddice l'esperienza matematica, la quale dà numerosi esempi di problemi che non sono stati risolti rimanendo all'interno di un dato sistema assiomatico. Tale è il caso dell'ultimo teorema di Fermat, che è stato stabilito da Wiles non deducendolo dagli assiomi della teoria dei numeri bensì servendosi di risultati della geometria delle curve ellittiche.

Invece nel metodo analitico risolvere un problema di un dato campo della matematica significa trovare ipotesi sufficienti per la sua soluzione, relative a quello o ad altri campi della matematica. Pertanto la soluzione di problemi ha il carattere di un dialogo, perché comporta uno scambio di informazione con ipotesi relative a più campi della matematica.

Per esempio, nel caso dell'ultimo teorema di Fermat, la soluzione di Wiles si basa sulla riduzione di Ribet del teorema alla congettura di Taniyama-Shimura, una riduzione che rivela profonde connessioni tra l'algebra delle equazioni diofantee e la geometria delle curve ellittiche, e quindi richiede un dialogo tra ipotesi relative a tali due campi della matematica.

Questo viene spiegato dal metodo analitico in base al fatto che la conoscenza relativa ad un dato campo della matematica non può essere concentrata in ipotesi relative a quel campo, che contengono sempre soltanto un'informazione parziale rispetto ad esso, ma dev'essere distribuita tra ipotesi relative a più campi, onde completare quell'informazione parziale. Per il metodo analitico, perciò, per risolvere un problema di un dato campo della matematica, è legittimo e anzi necessario usare informazione esterna a quel campo.

L'assunzione del metodo assiomatico che la dimostrazione debba avere il carattere di monologo è addirittura autocontraddittoria. Dal punto di vista del metodo assiomatico, infatti, lo scopo della dimostrazione è quello di convincere altri della verità di un teorema. Ma perché la dimostrazione possa farlo, occorre che esistano altri e che vi sia un'interazione con le informazioni possedute da essi, quindi che vi sia un dialogo tra più sistemi di conoscenze. Per convincere altri della verità di un teorema, si devono presupporre e utilizzare i loro sistemi di conoscenze, e quindi si deve dialogare con essi. Dunque l'accettazione di un teorema ha un carattere intrinsecamente dialogico.

4. La cambiabilità delle regole in corso d'opera

Un altro vantaggio del metodo analitico è che, a differenza del metodo assiomatico, esso rende conto del fatto che la soluzione dei problemi matematici avviene usando regole che possono sempre essere cambiate in corso d'opera.

Nel metodo assiomatico le regole del gioco sono date dall'inizio e non possono cambiare nel corso della dimostrazione. Le regole in questione sono gli assiomi, che sono dati una volta per sempre, e il gioco consiste nel dedurre conseguenze da essi. Cambiare le regole vuol dire cambiare gioco perché, se si cambiano gli assiomi di un sistema assiomatico, il sistema scompare e viene sostituito da un altro. Le regole non possono essere cambiate nel corso del gioco perché, se si cambiano gli assiomi nel corso di una dimostrazione, la dimostrazione collassa e non ne rimane in piedi più nulla. Ciò contraddice l'esperienza matematica la quale mostra che, nella soluzione dei problemi, le regole di procedura spesso vengono cambiate in corso d'opera.

Invece nel metodo analitico le regole del gioco, ossia le ipotesi, possono essere cambiate nel corso del gioco, pur rimanendo nello stesso gioco. La possibilità di cambiare le regole nel corso del gioco costituisce una fondamentale caratteristica del metodo analitico, anzi è la condizione stessa della sua possibilità: per così dire, è la regola più basilare del metodo. Infatti, il gioco della soluzione di problemi viene giocato con regole che non sono date dall'inizio ma sono inventate via via che procede la ricerca, e possono essere modificate nel corso del gioco. Anzi, lo scopo principale del gioco è proprio quello di trovare le regole per risolvere un problema. Non occorre che il cambiamento delle regole si mantenga entro rigidi limiti prefissati. I limiti possono essere trasgrediti ogniqualvolta lo si ritiene opportuno.

5. L'incompletezza

Un altro vantaggio del metodo analitico è che, a differenza del metodo assiomatico, esso è perfettamente compatibile col primo teorema di incompletezza di Gödel, anzi, per così dire, lo richiede.

Per il metodo assiomatico l'incompletezza non è un carattere strutturale della matematica ma è un incidente imprevisto. Per questo motivo von Neumann, dopo aver udito Gödel, nel corso di un convegno, annunciare pubblicamente il suo primo teorema di incompletezza, si chiese se avesse ancora senso pubblicare la propria relazione al convegno, dal momento che il risultato di Gödel aveva «portato la questione ad un livello completamente differente», e alla fine si convinse a pubblicarla solo «come descrizione di uno stato di cose ormai sorpassato» (von Neumann 1999, 40-41). Nello stesso convegno Carnap «ebbe dubbi simili, non solo riguardo alla pubblicazione, ma già riguardo alla presentazione della propria relazione» (Carnap 1999, 41).

Invece, per il metodo analitico, l'incompletezza è un carattere strutturale della matematica perché, dal suo punto di vista, la conoscenza relativa ad un dato campo della matematica non può essere concentrata in ipotesi relative a quel campo, che contengono sempre soltanto un'informazione parziale rispetto ad esso, ma dev'essere distribuita tra ipotesi relative a più campi, onde integrare e completare quell'informazione parziale. Quindi il metodo analitico presuppone, e in questo senso richiede, il primo teorema di incompletezza di Gödel.

6. La giustificazione delle ipotesi

Un altro vantaggio del metodo analitico è che, a differenza del metodo assiomatico, esso rende conto del fatto che la giustificazione delle ipotesi sta nelle loro conseguenze.

Nel metodo assiomatico la giustificazione degli assiomi non può stare nelle loro conseguenze, perché assiomi falsi possono avere sia conseguenze vere sia conseguenze false. Quindi il fatto che dagli assiomi siano state dedotte solo conseguenze vere non costituisce una prova della loro verità. Per poter giustificare gli assiomi in base alle loro conseguenze occorrerebbe mostrare che tutte le loro conseguenze possibili sono vere. Ma, come sottolinea Kant, «un procedimento del genere non è realizzabile, perché la conoscenza di tutte le conseguenze possibili di una qualsiasi proposizione oltrepassa ogni nostro potere» (Kant 1900- , III, 514). La giustificazione degli assiomi in base alle loro conseguenze «poggia sull'analogia: se il fondamento assunto risulta in accordo con tutte le conseguenze che sono state prese in esame, esso sarà in accordo anche con tutte le altre conseguenze possibili. Ma in tal modo non sarà mai possibile trasformare un'ipotesi in verità dimostrata» (*ibid.*).

Nondimeno alcuni sostenitori del metodo assiomatico, alquanto incongruamente, fanno appello ad una giustificazione degli assiomi basata sulle loro conseguenze.

Per esempio, Zermelo afferma che la giustificazione dell'assioma di scelta sta nel fatto che esso «è necessario per la scienza», come si vede «presentando un certo numero di teoremi e problemi elementari e fondamentali» che «non potrebbero essere trattati in alcun modo senza il principio di scelta» (Zermelo 1908, 113). Perciò «nessuno ha il diritto di impedire ai rappresentanti della scienza produttiva di continuare ad usare questa 'ipotesi'» e «a svilupparne le conseguenze con la massima ampiezza, tanto più che ogni possibile contraddizione inerente ad un dato punto di vista può essere scoperta solo in tal modo» (ivi, 115). In generale «i principi devono essere giudicati dal punto di vista della scienza, e non la scienza dal punto di vista di principi fissati una volta per sempre» (*ibid.*).

Parimenti Russell e Whithehead affermano che le conseguenze che si deducono dalle premesse «danno piuttosto ragioni per credere nelle premesse perché da esse seguono conseguenze vere, che non per credere nelle conseguenze perché esse seguono dalle premesse» (Whitehead-Russell 1925-27, I, *v*).

Dal canto suo, Gödel afferma che, «oltre all'intuizione matematica, esiste un altro criterio di verità (sebbene soltanto probabile) per gli assiomi matematici, cioè la loro fruttuosità in matematica e, si potrebbe aggiungere, possibilmente anche in fisica» (Gödel 1986- , II, 269). Per fruttuosità Gödel intende «la fruttuosità rispetto alle conseguenze» (ivi, II, 261). Certi assiomi possono dare «metodi così potenti per la soluzione di problemi» che «dovrebbero essere accettati almeno nello stesso senso in cui viene accettata ogni teoria fisica ben stabilita» (*ibid.*). Si possono paragonare gli assiomi «della matematica con le leggi di natura e l'evidenza logica con la percezione sensibile, sicché gli assiomi non devono necessariamente essere evidenti in sé, ma piuttosto la loro giustificazione sta (esattamente come in fisica) nel fatto che essi rendono possibile a queste 'percezioni sensibili' di essere dedotte» (ivi, II, 121).

Questo tipo di giustificazione è incongruente col metodo assiomatico perché, dal punto di vista di tale metodo, contrariamente a quanto affermano Russell e Whitehead, non sono le conseguenze che danno ragioni per credere nelle premesse perché da esse seguono conseguenze vere, ma sono le premesse che danno ragioni per credere nelle loro conseguenze. Un tale tipo di giustificazione è invece perfettamente naturale dal punto di vista del metodo analitico. Dal suo punto di vista, infatti, la giustificazione delle ipotesi risiede nelle loro conseguenze, e specificamente nel fatto che le ipotesi si accordano tra di loro e si accordano con la conoscenza esistente, cioè non hanno conseguenze che si contraddicono tra di loro o contraddicono la conoscenza esistente.

7. I gradi di correttezza delle dimostrazioni

Un altro vantaggio del metodo analitico è che, a differenza del metodo assiomatico, esso rende ragione del fatto che le dimostrazioni possono avere vari gradi di correttezza.

Nel metodo assiomatico, una dimostrazione o è corretta oppure non è corretta, anzi, o è una dimostrazione oppure non è una dimostrazione, perché una dimostrazione che non è corretta semplicemente non è una dimostrazione. Perciò non si può parlare del grado di correttezza di una dimostrazione. Questo distingue la matematica dalle scienze naturali, dove le prove possono avere vari gradi di correttezza. Per esempio, nella fisica un'asserzione può essere accettata inizialmente in base ad una prova abbastanza vacillante, che in seguito viene sostituita da un'altra più solida.

Per il metodo analitico, invece, le procedure in base alle quali si risolvono i problemi matematici possono avere vari gradi di correttezza perché, per risolvere un problema, anzitutto si introduce un'ipotesi la cui plausibilità non è ovvia in base alla conoscenza esistente, poi si cerca di consolidarla introducendo una nuova ipotesi che appare più solida in base alla conoscenza esistente, e così via all'infinito, introducendo di volta in volta una nuova ipotesi che appare più solida in base alla conoscenza esistente. La dimostrazione non è qualcosa che è dato una volta per sempre e c'è oppure non c'è, ma è un processo che si evolve e si perfeziona col tempo, stabilendo sempre nuovi legami tra il problema e la conoscenza esistente, e consolidando così la plausibilità e quindi la credibilità della soluzione del problema.

8. La pluralità delle dimostrazioni

Un altro vantaggio del metodo analitico è che, a differenza del metodo assiomatico, esso rende conto del fatto che spesso nella matematica si cercano nuove dimostrazioni di risultati già dimostrati.

Nel metodo assiomatico un risultato matematico si considera definitivamente stabilito quando ne è stata data una dimostrazione. Ciò contraddice l'esperienza matematica, la quale mostra invece che spesso si cercano nuove dimostrazioni di risultati già dimostrati. In effetti, «sfogliando una qualsiasi delle circa tremila riviste che pubblicano ricerca matematica originale, presto si scopre che pochi lavori di ricerca pubblicati presentano soluzioni di problemi ancora insoluti; meno ancora di tali lavori sono formulazioni di nuove teorie. La stragrande maggioranza degli articoli di ricerca nella matematica si occupa non di dimostrare, ma di ridimostrare» (Rota 1997, 116).

Un esempio di ciò è dato dal teorema dei numeri primi. Dopo la dimostrazione originaria di Hadamard e de la Vallée Poussin, per mezzo secolo ne sono state date dimostrazioni alternative. Poi Erdös e Selberg ne hanno dato una dimostrazione elementare: elementare nel senso che non si basa su risultati della geometria o dell'analisi, ma difficile da seguire e lunga una cinquantina di pagine. Successivamente sono state date semplificazioni e varianti di tale dimostrazione finché, a metà degli anni Sessanta, Levinson ha trovato una nuova dimostrazione elementare che è anche molto breve.

Ma, se la ricerca di nuove dimostrazioni di un teorema non può servire a stabilire quel teorema perché questo si suppone già stabilito definitivamente dalla prima dimostrazione, a che cosa serve tale ricerca? Il metodo assiomatico non sa dare una risposta. O meglio, in base ad esso, alla domanda se «la matematica come disciplina progredisce quando qualcuno risolve un problema che voleva risolvere o dimostra un teorema che voleva dimostrare», si deve rispondere che la matematica «non progredisce se il problema era già stato risolto o se il teorema era già stato dimostrato da

qualcun altro, per lo meno se la precedente soluzione o dimostrazione è ben nota alla comunità matematica» (Maddy 2000, 341). Per il metodo assiomatico, dunque, la scoperta di una nuova soluzione di un problema o di una nuova dimostrazione di un teorema non costituisce un progresso.

Per il metodo analitico, invece, nessun problema matematico è mai definitivamente risolto, ogni soluzione è destinata ad essere rimpiazzata da un'altra. Un problema matematico ha molte facce, ciascuna delle quali mostra il problema sotto un aspetto che lo mette in relazione con un diverso pezzo di conoscenza esistente, e quindi suggerisce di ricercare un'ipotesi in quella direzione. Perciò ogni faccia del problema può portare ad una nuova soluzione. Tale nuova soluzione stabilisce nuovi collegamenti tra il problema e la conoscenza esistente, perciò essa costituisce un progresso anche quando le soluzioni precedenti sono ben note nella comunità matematica.

9. L'antiriduzionismo analitico

Un altro vantaggio del metodo analitico è che, a differenza del metodo assiomatico, esso consente un tipo di antiriduzionismo, l'antiriduzionismo analitico, che non va incontro alle difficoltà dell'antiriduzionismo assiomatico. Secondo l'antiriduzionismo analitico, la soluzione di problemi comporta interazioni tra più pezzi di conoscenza che conservano la loro specificità senza essere riducibili l'uno all'altro.

Come abbiamo visto, l'antiriduzionismo assiomatico è confutato dal primo teorema di incompletezza di Gödel, in base al quale in generale non si possono dimostrare tutte le proposizioni vere di un dato genere mediante i principi di quel genere, ma per dimostrarle si deve ricorrere ai principi di un altro genere. Inoltre, l'antiriduzionismo assiomatico è in conflitto con l'esperienza matematica, la quale mostra che di fatto molte proposizioni matematiche relative ad un dato genere vengono dimostrate usando principi relativi ad un altro genere. E ancora, l'antiriduzionismo assiomatico si scontra col fatto che se, nel dimostrare una proposizione matematica relativa ad un dato genere, usiamo principi relativi ad un altro genere, possiamo ottenere una dimostrazione estremamente più semplice e breve.

Invece l'antiriduzionismo analitico non va incontro a queste difficoltà perché, in base ad esso, risolvere un problema di un dato campo della matematica comporta interazioni con altri campi della matematica, e quindi fa uso di informazioni esterne a quel campo. Tali informazioni non sono essenziali soltanto per l'efficienza della soluzione del problema, ma possono essere essenziali per l'esistenza stessa di una soluzione.

25
La riduzione all'assurdo e il metodo analitico

1. La riduzione all'assurdo

Una forma del metodo analitico è la riduzione all'assurdo, cioè il procedimento in base al quale, per dimostrare una proposizione della forma $\neg A$, si assume come ipotesi A e si mostra che da essa si possono dedurre due proposizioni contraddittorie B e $\neg B$. Da ciò si conclude $\neg A$.

Un esempio di uso della riduzione all'assurdo è la seguente dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$, cioè del fatto che non esistono due numeri interi p e q tali che $\sqrt{2} = p/q$. Supponiamo che tali due numeri interi p e q esistano. Allora $2 = p^2/q^2$, perciò $p^2 = 2q^2$. Ogni intero può essere scomposto in fattori primi. Scomponiamo p e q. Allora, poiché $p^2 = p \cdot p$, ogni primo ha un gemello in p^2, cioè, ad ogni sua occorrenza corrisponde un'occorrenza distinta in p^2. In particolare, ogni 2 ha un gemello in p^2. Per la stessa ragione, ogni 2 ha un gemello in q^2. Ma allora non ogni 2 ha un gemello in $2q^2$, e perciò, poiché $p^2 = 2q^2$, non ogni 2 ha un gemello in p^2. Dunque, da un lato, ogni 2 ha un gemello in p^2, e, dall'altro lato, non ogni 2 ha un gemello in p^2. Si ha così una contraddizione. Se ne conclude che non esistono due numeri interi p e q tali che $\sqrt{2} = p/q$.

Che la riduzione all'assurdo sia una forma del metodo analitico deriva dal fatto che in essa, per risolvere un problema $\neg A$, si formula un'ipotesi A che costituisce una condizione sufficiente per la soluzione del problema. Quindi la riduzione all'assurdo non parte da principi già dati ma da

una proposizione assunta come ipotesi, e perciò è un procedimento per ipotesi.

Il carattere di procedimento per ipotesi della riduzione all'assurdo è messo in luce già da Aristotele, il quale sottolinea che in essa «la conclusione ultima si costituisce con l'aiuto di un'ipotesi» (Aristotele, *Analytica Priora*, A 44, 50 a 32). Secondo Aristotele, coloro che usano la riduzione all'assurdo, «da un lato inferiscono sillogisticamente il falso, e dall'altro lato provano la conclusione che da principio si è stabilito di inferire partendo da un'ipotesi, quando cioè dall'assunzione della premessa contraddittoria a tale conclusione discende qualcosa di assurdo» (ivi, A 23, 41 a 23-26).

2. Differenze rispetto al metodo analitico

Che la riduzione all'assurdo sia una forma del metodo analitico ha, però, dei limiti. Infatti tra la riduzione all'assurdo e il metodo analitico esistono almeno due importanti differenze.

1) Mentre il metodo analitico è un procedimento per ipotesi in senso proprio, la riduzione all'assurdo è un procedimento per ipotesi sui generis. Infatti, come sottolinea Aristotele, mentre normalmente le ipotesi sono proposizioni su cui dev'esserci «un accordo preliminare se si vuol ottenere in seguito l'assenso», nella riduzione all'assurdo, «anche quando non sussiste accordo preliminare, si ottiene l'assenso perché la falsità di una certa proposizione è evidente» (Aristotele, *Analytica Priora*, A 44, 50 a 33-37).

2) Mentre il metodo analitico è un procedimento per ipotesi che non è banale in quanto l'ipotesi B mediante la quale si dimostra una proposizione A non è contenuta in A, come procedimento per ipotesi la riduzione all'assurdo è piuttosto banale, perché l'ipotesi mediante la quale si dimostra una proposizione $\neg A$ è semplicemente A.

3. La dimostrazione indiretta

Un procedimento strettamente connesso con la riduzione all'assurdo è la dimostrazione indiretta, cioè il procedimento in base al quale, per dimostrare una proposizione A, si assume come ipotesi $\neg A$ e si mostra che da essa si possono derivare due proposizioni contraddittorie B e $\neg B$.
Da ciò si conclude A.

Un esempio di uso della dimostrazione indiretta è la dimostrazione di Euclide della proposizione 20 del libro IX degli *Elementi*: per ogni numero primo, ne esiste uno maggiore. Supponiamo che non sia così. Allora esiste un numero primo massimo p. Sia $p_1,..., p_n$ la successione di tutti i numeri primi in ordine di grandezza, che per ipotesi è finita. Perciò $p_n = p$. Sia $q = p_1 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Allora $q > p$, quindi q non è un numero primo. Ma poiché

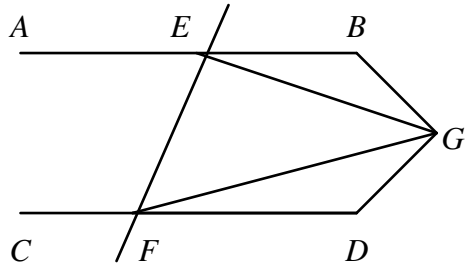
ogni numero >1 è divisibile per un numero primo e $q>1$, ne segue che q è divisibile per un numero primo. D'altra parte, poiché $q = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$, la divisione di q per un numero primo avrà sempre resto 1, quindi q non è divisibile per un numero primo. Si ha così una contraddizione. Se ne conclude che, per ogni numero primo, ne esiste uno maggiore.

In presenza del principio del terzo escluso, la dimostrazione indiretta si riduce alla riduzione all'assurdo. Infatti, se da $\neg A$ si può derivare una contraddizione, allora per riduzione all'assurdo si ottiene $\neg\neg A$. Ma, per il principio del terzo escluso, o A oppure $\neg A$. Perciò da $\neg\neg A$ si conclude A.

4. Il *modus tollens*

La riduzione all'assurdo non va confusa col *modus tollens*, cioè col procedimento in base al quale, per dimostrare una proposizione della forma $\neg A$, si assume come ipotesi A e si mostra che da essa si può derivare una proposizione B che contraddice una proposizione $\neg B$ già dimostrata. Da ciò si conclude $\neg A$.

Un esempio di uso del *modus tollens* è dato dalla dimostrazione di Euclide della proposizione 27 del libro I degli *Elementi*: se una retta EF, incontrando due rette AB e CD, forma angoli alterni AEF e EFD eguali, allora le rette AB e CD sono parallele, cioè tali che, prolungate indefinitamente, non si incontrano.



Supponiamo che $AEF = EFD$ ma che AB e CD, prolungate, si incontrino, diciamo nel punto G. Consideriamo il triangolo GEF. Per ipotesi l'angolo esterno AEF è eguale all'angolo interno opposto EFG. Quindi l'angolo esterno AEF non è maggiore dell'angolo interno opposto EFG. Ma, per una proposizione già dimostrata negli *Elementi*, ossia la proposizione 16 del libro I, in un triangolo l'angolo esterno è maggiore dell'angolo interno opposto. Si ha così una contraddizione. Se ne conclude che AB e CD, prolungate indefinitamente, non si incontrano e perciò sono parallele.

Tra la riduzione all'assurdo e il *modus tollens* vi è un'importante differenza. Mentre per mezzo della prima si dimostra $\neg A$ prendendo come ipotesi A e deducendo da essa due proposizioni contraddittorie tra loro, B e $\neg B$, per mezzo del secondo si dimostra $\neg A$ prendendo come ipotesi A e deducendo da essa una proposizione B che contraddice una proposizione $\neg B$ già dimostrata.

Per esempio, nella dimostrazione per riduzione all'assurdo dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$, si assume come ipotesi che esistano due numeri interi p e q tali che $\sqrt{2} = p/q$, e se ne derivano due proposizioni contraddittorie tra loro, ossia le proposizioni, 'ogni 2 ha un gemello in p^2', e 'non ogni 2 ha un gemello in p^2'.

Invece, nella dimostrazione per *modus tollens* della proposizione 27 del libro I degli *Elementi*, si assume come ipotesi che AB e CD si incontrino in un punto G e se ne deduce la proposizione, 'l'angolo esterno AEF non è maggiore dell'angolo interno opposto EFG', che contraddice una proposizione già dimostrata negli *Elementi*, cioè la proposizione 16 del libro I.

Questa differenza tra la riduzione all'assurdo e il *modus tollens* implica che tali due procedimenti appartengono a due diverse concezioni del metodo della matematica.

In quanto fa intervenire due proposizioni contraddittorie tra loro, entrambe dedotte da un'ipotesi A, la riduzione all'assurdo non presuppone alcun sistema assiomatico. Essa, infatti, non fa riferimento a proposizioni già dimostrate prima di A, ma solo a proposizioni contraddittorie dedotte unicamente da A. Non presupponendo alcun sistema assiomatico, la riduzione all'assurdo non fa uso di principi dati, ma solo di una proposizione assunta come ipotesi, e pertanto rientra nel metodo analitico.

Invece, in quanto fa intervenire una proposizione dedotta da un'ipotesi A che contraddice una proposizione già dimostrata a partire da principi dati, il *modus tollens* presuppone un sistema assiomatico. Specificamente, nel caso della proposizione 27 del libro I degli *Elementi*, esso presuppone il sistema assiomatico di Euclide. Pertanto il *modus tollens* rientra nel metodo assiomatico.

5. Riduzione all'assurdo ed esperienza immediata

La riduzione all'assurdo è utile soprattutto quando si vuol stabilire un risultato contrario all'esperienza immediata. Per esempio, nel caso dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$, o equivalentemente dell'incommensurabilità della diagonale e del lato del quadrato di lato 1, «fa meraviglia che tra l'una e l'altro non vi sia un'unità minima di misura comune» (Aristotele,

Metaphysica, A 2, 983 a 16-18). La meraviglia deriva dal fatto che l'esperienza immediata suggerirebbe che, prendendo un'unità di misura sufficientemente piccola, potremmo sempre rendere commensurabili due rette. Per dimostrare un risultato così contrario all'esperienza immediata è vantaggioso ricorrere alla riduzione all'assurdo.

Poiché la riduzione all'assurdo è utile soprattutto quando si vuol stabilire un risultato contrario all'esperienza immediata, non sorprende che essa svolga un ruolo centrale nella filosofia eleatica, le cui dottrine contraddicono tale esperienza. Mentre l'esperienza immediata ci assicura che vi è una molteplicità di cose e che tutto è mutamento, movimento, generazione e corruzione, spazio e tempo, gli Eleati sostengono che non vi è una molteplicità di cose e che non esistono mutamento, movimento, generazione e corruzione, spazio e tempo. Per stabilirlo, essi non possono basarsi sull'esperienza immediata, che assicura il contrario, perciò ricorrono alla riduzione all'assurdo, mediante la quale mostrano che, se si dà per vero quanto ci dice l'esperienza immediata, ne deriva una contraddizione.

Per esempio, per stabilire che non vi è una molteplicità di cose, Zenone di Elea usa l'argomento che, «se vi è una molteplicità di cose, esse sono necessariamente tante quante sono e né più né meno. Ma, se sono tante quante sono, sono definite. D'altra parte, se vi è una molteplicità di cose, esse sono indefinite: infatti, in mezzo alle cose ve ne sono sempre altre, e in mezzo a queste di nuovo altre. E così le cose sono indefinite» (Simplicio, *In Aristotelis physicorum libros*, 140, 27). Si ha così una contraddizione. Se ne conclude che non vi è una molteplicità di cose.

Secondo Szabo, si deve «ascrivere all'influsso della filosofia eleatica la costruzione della matematica sistematico-deduttiva dei greci», quindi «senza la filosofia di Parmenide e Zenone non si sarebbe potuto costruire un sistema così ingegnoso come gli *Elementi* di Euclide» (Szabó 1969, 291). Ma questa tesi è insostenibile. Al contrario, data la centralità del ruolo svolto dalla riduzione all'assurdo nell'ambito della filosofia eleatica, e poiché la riduzione all'assurdo non presuppone alcun sistema assiomatico ma è un procedimento per ipotesi, sembra più corretto dire che la filosofia eleatica ha contribuito allo sviluppo del metodo analitico.

26
La matematica come sistema aperto

1. L'assunzione del mondo aperto

L'assunzione della concezione euristica che il metodo della matematica è il metodo analitico può anche essere riformulata sotto forma della seguente assunzione, che chiameremo assunzione del mondo aperto: le teorie matematiche sono sistemi aperti.

Per sistema aperto si intende qui un sistema basato sul metodo analitico. L'uso di tale terminologia si basa su un'analogia con la fisica. Come in questa per sistema aperto si intende un sistema che può scambiare energia o materia con altri sistemi, così qui per sistema aperto si intende un sistema basato sul metodo analitico, perché un tale sistema può scambiare informazione con altri sistemi.

In effetti, in un sistema basato sul metodo analitico, l'unica informazione disponibile all'inizio è il problema da risolvere. Lo sviluppo del sistema consiste nell'introdurre nuove ipotesi, servendosi di informazione proveniente da altri sistemi. Le ipotesi non sono implicite nel problema da risolvere, quindi introducono nuova informazione non contenuta in esso.

L'assunzione del mondo aperto è del tutto naturale dal punto di vista della concezione euristica, perché i sistemi basati sul metodo analitico servono per scoprire nuove conoscenze. Essi mostrano, infatti, che le nuove conoscenze si ottengono attraverso l'introduzione di ipotesi. Naturalmente, poiché in tali sistemi la scoperta di nuove conoscenze avviene attraverso l'introduzione di ipotesi, l'assunzione del mondo aperto riduce il problema della scoperta di nuove conoscenze a quello della scoperta delle ipotesi.

2. Il carattere interattivo dello sviluppo della matematica

L'assunzione del mondo aperto implica che lo sviluppo della matematica è il risultato dell'interazione tra sistemi aperti.

All'inizio è dato solo il problema da risolvere. Invece, le ipotesi per la soluzione del problema non sono date dall'inizio, anzi trovarle costituisce lo scopo principale dell'indagine. Esse sono introdotte tramite l'interazione con altri sistemi, che quindi è essenziale per la soluzione di problemi. Inoltre, le ipotesi non si trovano di colpo ma sono introdotte per passi successivi, e non sono date una volta per sempre ma possono essere sostituite con altre ad ogni passo. L'introduzione di nuove ipotesi non comporta l'abbandono del sistema e la creazione di un nuovo sistema, ma solo un'evoluzione del sistema, che conserva alcuni suoi caratteri, ne lascia cadere altri ma ne acquista di nuovi.

Un sistema aperto non contiene una rappresentazione completa delle conoscenze relative ad una data area della matematica ma solo una loro rappresentazione parziale, perciò deve interagire con altri sistemi per acquisire conoscenze non disponibili in esso. L'interazione con altri sistemi non dà luogo semplicemente ad un accrescimento cumulativo della conoscenza del sistema ma ne provoca una ristrutturazione, determinando cambiamenti non solo locali ma anche globali. Attraverso l'interazione con altri sistemi si instaurano nuove relazioni tra il problema da risolvere e la conoscenza esistente.

La varietà e la ricchezza di tali relazioni dipende dalla natura del problema. In generale un problema è tanto più significativo e importante quanto più può entrare in relazione con altri problemi attraverso l'interazione con altri sistemi. In tal modo esso acquista sempre nuove valenze e nuovi significati. Inoltre, un problema non ha necessariamente un'unica soluzione. Ogni nuova soluzione stabilisce nuove relazioni tra il problema e la conoscenza esistente, mostrando il problema in una nuova luce e facendogli acquistare un nuovo significato.

Perciò, come osserva Poincaré, dal punto di vista della concezione euristica lo sviluppo della matematica non dev'essere paragonato «alle trasformazioni di una città, in cui i vecchi edifici sono inesorabilmente abbattuti per far posto alle costruzioni nuove, ma all'evoluzione continua delle specie zoologiche, che si sviluppano incessantemente e finiscono per diventare irriconoscibili agli occhi volgari, ma in cui un occhio esercitato ritrova sempre le tracce del lavoro anteriore dei secoli passati» (Poincaré 1970, 23). Anche i sistemi aperti si sviluppano incessantemente attraverso le interazioni con gli altri sistemi. Ma, come l'evoluzione delle specie zoologiche non avviene sempre alla stessa velocità e può subire brusche accelerazioni, così l'evoluzione di un sistema aperto non avviene sempre alla stessa velocità e può subire brusche accelerazioni quando, per effetto delle interazioni con gli altri sistemi, vengono introdotte nuove ipotesi che danno luogo ad una nuova organizzazione del sistema.

3. L'esigenza dell'assunzione del mondo aperto

L'esigenza che sta alla base dell'assunzione del mondo aperto è quella di render conto della scoperta matematica.

Che l'assunzione del mondo aperto permetta di soddisfare tale esigenza appare chiaro dal fatto che, quando esaminiamo approfonditamente il procedimento attraverso cui troviamo la soluzione di un problema matematico, riconosciamo che esso consiste nell'introdurre un'ipotesi per risolvere il problema, poi nell'introdurre un'altra ipotesi per risolvere il problema costituito da tale ipotesi, e così via all'infinito. Dunque la soluzione di un problema matematico avviene in base al metodo analitico.

È insostenibile, invece, che essa avvenga in base al metodo assiomatico. Infatti, un problema matematico può essere scritto nella forma $A \to B$, dove A è la condizione e B il corpo del problema, e, in base al metodo assiomatico, il modo standard di risolverlo consiste nell'estendere gli assiomi del sistema assiomatico aggiungendo ad essi l'ipotesi A, e nel dedurre B dagli assiomi così estesi. Perciò la soluzione del problema $A \to B$ non avviene nel mondo chiuso del sistema assiomatico, ma in un mondo aperto in cui agli assiomi del sistema si aggiunge A. A differenza degli assiomi, l'ipotesi A non serve per dedurre qualsiasi conclusione ma solo la conclusione B, quindi è specifica per B.

Tuttavia, per soddisfare l'esigenza di render conto della scoperta matematica, l'assunzione del mondo aperto da sola non basta perché, come abbiamo già detto, essa riduce il problema della scoperta di nuove conoscenze a quello della scoperta delle ipotesi. Per risolvere tale nuovo problema, la concezione euristica assume che le ipotesi si trovino mediante inferenze non-deduttive.

4. L'articolazione dell'assunzione del mondo aperto

Una formulazione più articolata dell'assunzione del mondo aperto, integrata con quella che le ipotesi si trovino mediante inferenze non-deduttive, può essere data nel modo seguente.

1) La matematica è soluzione di problemi.

2) La conoscenza matematica è lo scopo della soluzione di problemi e il suo risultato quando ha successo.

3) La conoscenza matematica risultante dalla soluzione di problemi non è assolutamente certa, è soltanto plausibile.

4) La soluzione di problemi è un processo di scoperta di nuove conoscenze matematiche.

5) Tale processo di scoperta si basa sul metodo analitico.

6) La scoperta si basa sul fatto che le ipotesi per la soluzione di un problema si ottengono da quest'ultimo mediante inferenze non-deduttive, la cui conclusione contiene qualcosa di essenzialmente nuovo rispetto alle premesse, per cui le ipotesi contengono qualcosa di essenzialmente nuovo rispetto al problema.

7) Poiché le ipotesi si ottengono dal problema mediante inferenze la cui conclusione contiene qualcosa di essenzialmente nuovo rispetto alle premesse, la soluzione di problemi si sviluppa nello spazio aperto di tutta la conoscenza, avvalendosi di interazioni con altri settori della conoscenza.

8) La scoperta è un processo matematico razionale, quindi fa parte della matematica. A quest'ultima appartiene, dunque, la scoperta di nuove conoscenze matematiche.

5. La natura della matematica

In base a questa formulazione dell'assunzione del mondo aperto, la matematica è soluzione di problemi. Questa tesi è espressa da Platone, il quale afferma che noi «studieremo la geometria, così come l'astronomia, per risolvere problemi» (Platone, *Respublica*, VII 530 b 6-7). Ma essa è già implicita nel metodo della riduzione di Ippocrate di Chio.

Nessuna area della matematica può essere interamente governata dando ipotesi che permettono di risolvere tutti i problemi di quell'area. In ogni area si presentano continuamente nuove situazioni che fanno sorgere nuovi problemi, per risolvere i quali si introducono ipotesi mediante inferenze non-deduttive. Dunque le ipotesi non servono per risolvere tutti i possibili problemi ma solo specifici problemi di una data area, perciò esse non sono globali ma locali.

Non solo la matematica è soluzione di problemi, ma è soluzione fallibile di problemi, perché fa uso di ipotesi che, per quanto ben stabilite, sono sempre suscettibili di revisioni in seguito a sempre nuove interazioni con la conoscenza esistente. Questo non distingue ma accomuna la matematica alle altre scienze, che sono anch'esse formulazioni fallibili di leggi.

6. Soluzione di problemi contro dimostrazione di teoremi

La tesi dell'assunzione del mondo aperto che la matematica è soluzione di problemi corrisponde a quanto il matematico è portato a pensare dalla propria esperienza, e si contrappone alla tesi dell'assunzione del mondo chiuso che la matematica è dimostrazione di teoremi. La contrapposizione tra tali due tesi è così radicale che il tentativo di farle coesistere produce un equilibrio instabile, che è destinato prima o poi a rompersi.

Ciò si vede, ad esempio, da Hilbert. Da un lato, egli è portato dalla sua esperienza di matematico a riconoscersi nella tesi che la matematica è

soluzione di problemi. Dall'altro lato, è spinto ad accettare la tesi che la matematica è dimostrazione di teoremi dalla sua preoccupazione per il rigore matematico, che per lui «non è altro che il requisito del rigore nella conduzione della dimostrazione» (Hilbert 1970, III, 293).

In un primo momento Hilbert cerca di mantenere un equilibrio tra queste due tesi. La sua posizione in tale fase può essere articolata nei seguenti punti.

1) La matematica si sviluppa ponendo e risolvendo problemi. Infatti, poiché «un campo della conoscenza è vitale finché offre un'abbondanza di problemi», e «una scarsità di problemi significa la sua estinzione o la cessazione del suo sviluppo autonomo», anche «la ricerca matematica ha bisogno di problemi. Risolvendo problemi il ricercatore tempra la sua forza: egli trova nuovi metodi e nuove prospettive, e conquista un orizzonte più ampio e più libero» (Hilbert 1970, III, 290). In particolare, certi problemi hanno «un alto significato per il progresso della matematica in generale, e svolgono un ruolo importante nel lavoro del singolo ricercatore» (*ibid.*).

2) Esiste una riserva illimitata di problemi matematici. Infatti, nella matematica «esiste un'immensa abbondanza di problemi e, appena un problema viene risolto, al suo posto emergono innumerevoli nuovi problemi» (ivi, III, 298).

3) Uno stesso problema può presentarsi in più campi della matematica. Spesso accade «che uno stesso problema particolare si presenti nelle discipline più diverse della matematica. Per esempio, il problema della linea più breve svolge un ruolo importante, storico e teorico, nei fondamenti della geometria, nella teoria delle linee e delle superfici curve, nella meccanica e nel calcolo delle variazioni» (ivi, III, 292).

4) I problemi matematici nascono da un'interazione tra pensiero ed esperienza. Infatti, i «primi e più antichi problemi in ogni branca della matematica traggono origine dall'esperienza e sono stati suggeriti dal mondo dei fenomeni esterni» (ivi, III, 292). Ma nell'ulteriore sviluppo della matematica la mente umana, «incoraggiata dalla riuscita delle soluzioni, diventa consapevole della propria autonomia; trae da se stessa, spesso senza riconoscibili stimoli esterni, nuovi e fecondi problemi» (ivi, III, 293). Frattanto, però, «il mondo esterno torna a farsi valere, ci impone nuove questioni mediante i fenomeni reali, apre nuovi campi della conoscenza matematica; e non di rado, mentre cerchiamo di acquisire questi nuovi campi al regno del pensiero puro, troviamo le risposte ad antichi problemi irrisolti e facciamo avanzare nel modo migliore le vecchie teorie» (*ibid.*). La ricerca matematica si basa su questo «gioco alterno e sempre rinnovantesi tra pensiero ed esperienza» (*ibid.*).

5) Un buon problema matematico presenta certi caratteri generali. È naturale chiedersi «se vi siano caratteri generali che contraddistinguono un buon problema matematico» (ivi, III, 291). Tali caratteri generali esistono e

sono, anzitutto, «la chiarezza e la facile esprimibilità», perché «ciò che è chiaro e facilmente esprimibile ci attrae, ciò che è complicato ci spaventa. In secondo luogo, un problema matematico dev'essere difficile perché possa eccitarci, ma dev'essere non del tutto inaccessibile perché non irrida le nostre fatiche» (*ibid.*).

6) Risolvere un problema non consiste nel derivarne la soluzione da assiomi dati, ma nell'estrarre le ipotesi per la soluzione che sono implicate nella formulazione del problema. Nelle «ricerche aritmetiche così come nelle ricerche geometriche, noi non seguiamo abitualmente la catena delle operazioni mentali fino agli assiomi» (ivi, III, 296). Al contrario, la soluzione si ottiene «mediante un numero finito di inferenze, e precisamente in base ad un numero finito di ipotesi che sono implicate nella formulazione del problema e che devono sempre essere formulate con esattezza» (ivi, III, 293). Dunque la soluzione non si ottiene partendo dagli assiomi, bensì partendo dalla formulazione del problema.

7) La scoperta delle ipotesi per la soluzione di un problema si basa sull'intuizione. Infatti, «specialmente al primo impatto con un problema, noi ricorriamo a certe combinazioni rapide, inconsapevoli, non assolutamente sicure, fidandoci di una certa sensibilità aritmetica verso il modo di agire dei segni aritmetici, senza la quale progrediremmo nell'aritmetica altrettanto poco quanto faremmo nella geometria senza l'immaginazione geometrica» (ivi, III, 296). Tanto questa certa sensibilità aritmetica verso il modo di agire dei segni aritmetici quanto l'immaginazione geometrica sono forme differenti di intuizione.

8) In aggiunta all'intuizione, però, la soluzione di un problema fa anche uso di procedimenti discorsivi. Specificamente, noi procediamo «mediante felici combinazioni logiche, generalizzazioni, particolarizzazioni, separazioni e riunioni di concetti» (ivi, III, 293).

9) Tra i procedimenti discorsivi per la soluzione di un problema svolge un ruolo importante la generalizzazione. Quando «non riusciamo a risolvere un problema matematico, spesso la ragione sta nel fatto che non abbiamo ancora compreso il punto di vista più generale, dal quale il problema dato appare soltanto come un singolo anello di una catena di problemi affini. Dopo aver scoperto tale punto di vista, spesso non solo questo problema diventa più accessibile alla nostra indagine, ma nello stesso tempo veniamo in possesso di un metodo che è applicable anche a problemi affini» (ivi, III, 296).

10) Tra i procedimenti discorsivi per la soluzione di un problema svolge un ruolo ancora più importante la particolarizzazione. Infatti, «forse nella maggior parte dei casi in cui cerchiamo invano la risposta ad una questione, la causa dell'insuccesso sta nel fatto che non sono stati ancora risolti, o non sono stati ancora completamente risolti, problemi più semplici e più facili di quello che ci sta innanzi. Allora tutto sta nello scoprire questi

problemi più semplici e nel risolverli con strumenti quanto più perfetti possibile e con concetti suscettibili di generalizzazione. Questa norma è una delle leve più importanti per superare le difficoltà matematiche», e sembra «che essa sia usata quasi sempre, sebbene inconsapevolmente» (ivi, III, 296-297).

11) La soluzione di un problema avviene sullo sfondo della conoscenza esistente. Infatti «un nuovo problema, specialmente se proviene dal mondo dell'esperienza esterna, è come un giovane tralcio che cresce e dà frutti solo se viene innestato con cura e secondo le rigorose regole del giardiniere sul vecchio tronco, sul sicuro patrimonio della nostra conoscenza matematica» (ivi, III, 293-294).

12) Se non si riesce in alcun modo a risolvere un problema, si deve indagare se nessuna soluzione sia possibile sotto le ipotesi date. A volte «capita che cerchiamo la soluzione sotto ipotesi insufficienti o in un senso sbagliato, e perciò non raggiungiamo la meta. Sorge allora il compito di dimostrare l'impossibilità della soluzione del problema sotto le ipotesi date e nel senso voluto. Tali dimostrazioni di impossibilità vennero fatte già dagli antichi, quando, ad esempio, mostrarono che l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele sta in un rapporto irrazionale con i cateti» (ivi, III, 297). Ma anche «nella matematica moderna la questione dell'impossibilità di certe soluzioni svolge un ruolo eminente, e così ci rendiamo conto che antichi e difficili problemi (quali la dimostrazione dell'assioma delle parallele, la quadratura del cerchio o la risoluzione delle equazioni di quinto grado mediante radicali) hanno trovato una soluzione pienamente soddisfacente e rigorosa, anche se in un senso diverso da quello inteso originariamente» (*ibid.*).

13) Quando si trova la soluzione di un problema, per il rigore si deve riformularla mediante il metodo assiomatico. Allorché «da parte della teoria della conoscenza oppure in geometria, o nelle teorie della scienza naturale, emergono concetti matematici, nasce per la matematica il compito di indagare i principi che stanno alla base di questi concetti e di fissarli mediante un sistema di assiomi semplice e completo» (ivi, III, 295). Infatti, una scienza è «un sistema di cose le cui relazioni reciproche sono governate dagli assiomi fissati», che devono dare una descrizione precisa e completa di tali relazioni, perché per esse devono essere «veri tutti e solo quei fatti che possono essere dedotti dagli assiomi mediante un numero finito di inferenze logiche» (ivi, III, 301).

Che in questa fase Hilbert cerchi di mantenere un equilibrio tra la tesi che la matematica è soluzione di problemi e quella che la matematica è dimostrazione di teoremi, appare chiaro dal fatto che, dei punti precedenti, alcuni rientrano naturalmente sotto la prima tesi mentre altri rientrano sotto la seconda. Per mantenere l'equilibrio Hilbert sostiene che la matematica nel

suo farsi è soluzione di problemi, mentre la matematica in forma compiuta è dimostrazione di teoremi.

Ma l'equilibrio è precario e si rompe definitivamente quando Brouwer e Weyl pretendono che, come via di uscita dalla contraddizione scoperta da Zermelo e Russell, si debba rinunciare a parti sostanziali della matematica. Da allora Hilbert abbandona la tesi che la matematica è soluzione di problemi, la giustificazione delle conoscenze matematiche già acquisite diventa la sua unica preoccupazione, ed egli si aggrappa alla tesi che la matematica è dimostrazione di teoremi.

7. Fallibilità contro infallibilità

Sebbene, come abbiamo visto, in un primo momento Hilbert cerchi di mantenere un equilibrio tra la tesi che la matematica è soluzione di problemi e la tesi che la matematica è dimostrazione di teoremi, vi è una fondamentale differenza tra come egli intende la soluzione di problemi e come la intende la concezione euristica. Mentre per Hilbert la matematica è soluzione infallibile di problemi perché ogni problema dev'essere capace di una rigorosa e definitiva sistemazione, per la concezione euristica essa è soluzione fallibile di problemi perché si basa su ipotesi che sono sempre suscettibili di revisioni.

Tra queste due posizioni vi è un sostanziale asimmetria. Mentre la tesi che la matematica è soluzione fallibile di problemi non è scalfita dai teoremi di incompletezza di Gödel, la tesi che è soluzione infallibile di problemi è confutata da essi. Infatti la soluzione di un problema non può essere più corretta degli assiomi a partire dai quali è stata ottenuta, e per il secondo teorema di incompletezza di Gödel la correttezza degli assiomi, anche nella forma debole della coerenza, non può essere dimostrata con i metodi assolutamente sicuri della matematica finitaria.

Perciò la tesi che la matematica sia soluzione infallibile di problemi dev'essere abbandonata. In generale non vi è alcun modo di dimostrare con metodi assolutamente sicuri che la soluzione di un problema è assolutamente corretta. Dunque la matematica non può che essere soluzione fallibile di problemi. Essa non si basa, come vorrebbe Hilbert, su un'impenetrabile intuizione infallibile, bensì su un processo di scoperta penetrabile ma fallibile.

27
La matematica come soluzione di problemi

1. Le questioni fondamentali della concezione euristica

La tesi della concezione euristica che la matematica è soluzione di problemi fa nascere subito le seguenti questioni.

a) Come nascono i problemi matematici?
b) Come si pongono i problemi matematici?
c) Come si risolvono i problemi matematici?

A monte di tali questioni vi è poi ovviamente la seguente questione basilare preliminare.

d) La tesi che la matematica è soluzione di problemi è plausibile?

Tali questioni sono essenziali per valutare la concezione euristica e vagliarne l'aspirazione a porsi come spiegazione complessiva dell'attività matematica.

2. La nascita dei problemi matematici

Come nascono i problemi matematici? Essi nascono da situazioni che rendono perplessi. Niente di per sé è un problema matematico, ma lo diventa solo se rende perplesso qualcuno.

Le situazioni che rendono perplessi e da cui traggono origine i problemi matematici sono di vario genere. I problemi matematici nascono da esigenze della vita sociale ed economica, quali le transazioni commerciali e finanziarie, la costruzione di palazzi e chiese, ponti e dighe, navi ed aerei. Nascono dall'indagine del mondo fisico, dove l'uso della matematica ha acquistato un rilievo e un peso sempre maggiori. Nascono dalla curiosità intellettuale, che spesso ha dato ai matematici lo spunto e la spinta iniziale per occuparsi di questioni apparentemente prive di nessi con le esigenze della vita sociale e con l'indagine del mondo fisico, come quelle che hanno dato origine alla teoria dei numeri, alla geometria proiettiva, alla teoria degli insiemi

infiniti, e a varie altre. Nascono dalla ricerca della bellezza, che spesso spinge il matematico ad indagare questioni e a fare costruzioni che gli procurano un grande senso di appagamento estetico.

Che i problemi matematici nascano da situazioni che rendono perplessi appare chiaro fin dalle origini della matematica, quando ad esempio il problema di trovare criteri di similitudine dei triangoli sorse dall'esigenza di misurare grandezze, come la distanza di una nave dalla costa, che non erano accessibili direttamente mediante il tatto ma solo indirettamente mediante la vista. Tale esigenza rendeva perplessi. Per soddisfarla si considerò un triangolo rettangolo accessibile all'osservatore mediante il tatto, simile a quello formato dalla base di una torre sulla costa, dalla cima della torre e dalla nave, e, servendosi della similitudine, si ricavò la distanza della nave dalla costa. Così la distanza della nave dalla costa, che non era accessibile direttamente mediante il tatto ma solo indirettamente mediante la vista, attraverso tale triangolo rettangolo divenne accessibile mediante il tatto.

Poiché le situazioni da cui traggono origine i problemi matematici sono di vario genere, ne segue che i problemi matematici non presentano necessariamente caratteristiche stabili. Quello che viene considerato un problema matematico in un'epoca può non essere considerato tale in un'altra epoca. Addirittura, fino al secolo scorso, non vi era una netta distinzione tra i problemi matematici e i problemi fisici, e ancor oggi alcuni ritengono che una tale distinzione non possa essere tracciata. Per esempio, le definizioni insiemistiche della meccanica o della termodinamica non sono essenzialmente differenti da quelle della teoria dei gruppi, degli anelli o dei campi.

3. La posizione dei problemi matematici

Come si pongono i problemi matematici? Anzitutto, per porre un problema matematico occorre vederlo. Si vede un problema matematico quando la perplessità suscitata dalla situazione da cui esso nasce perdura per un certo tempo e si sente l'esigenza di trovarne una soluzione. Non tutti i problemi matematici sono visti da chiunque. Una persona inesperta può non vedere un problema matematico, perché non si rende conto di trovarsi di fronte ad una situazione che dovrebbe renderlo perplesso. Viceversa, una persona molto esperta può non vedere un problema matematico molto semplice perché non lo rende perplesso, e quindi lo lascia indifferente trovandone ovvia la soluzione. Solo una persona la cui abilità è dello stesso ordine di grandezza della difficoltà del problema ne viene resa perplessa e ne considera la soluzione come una scoperta. Perciò un problema matematico dev'essere abbastanza difficile da suscitare il nostro interesse, ma non impossibile, altrimenti tutti i nostri sforzi per risolverlo risulterebbero vani.

Una volta visto, un problema matematico dev'essere formularlo opportunamente perché, con una formulazione inadeguata, la ricerca della soluzione del problema stenta ad avviarsi o segue vie sbagliate. La

formulazione del problema suggerisce quali dati scegliere e quali rigettare, di quali indicazioni avvalersi e quali respingere, in quali direzioni cercare le ipotesi e in quali non cercarle. Quando si riesce a formulare opportunamente un problema matematico, spesso si è già abbastanza avanti nella ricerca. Perciò si dice comunemente che un problema matematico ben posto è già mezzo risolto.

La formulazione di un problema matematico trasforma una situazione che rende perplessi in un compito che può essere affrontato. Questa trasformazione è un'operazione non semplice né breve. Per realizzarla, la situazione dev'essere analizzata. L'analisi fornisce i termini del problema, cioè le condizioni che devono essere soddisfatte quando si cerca di risolverlo, che in generale si trovano attraverso un processo lungo e complesso. I casi in cui un problema matematico sembra essere stato formulato in un lampo, in realtà sono stati preceduti da un lungo periodo di elaborazione preliminare.

La formulazione di un problema matematico non garantisce, però, che si riuscirà a risolverlo. Spesso si formula un problema matematico quando non sono ancora disponibili mezzi idonei a tale scopo, o quando la formulazione del problema ha presupposti non ancora esplicitati. In questi casi la soluzione del problema può essere troppo difficile e tutti gli sforzi per trovarla possono risultare vani. D'altra parte, anche procedere al sicuro, scegliendo un problema soltanto perché la sua soluzione è abbastanza facile, può essere uno spreco, perché un risultato mediocre può essere una ricompensa insoddisfacente anche per uno sforzo modesto.

Questo significa che i problemi importanti che si incontrano nella ricerca matematica sono essenzialmente differenti sia dai rompicapi formali (come quello dei missionari e dei cannibali), sia dai problemi di deduzione formale (che richiedono di dedurre una data proposizione da assiomi dati mediante regole date), sia dai problemi che si sottopongono agli studenti come esercizio nell'insegnamento della matematica. Di tali problemi si sa dall'inizio che ammettono una soluzione con i mezzi attualmente disponibili, mentre dei problemi che si incontrano nella ricerca matematica questo non è noto.

Comunque, anche quando un problema matematico non è stato ancora risolto e non si sa se si riuscirà a risolverlo, la sua formulazione conduce di per sé ad una crescita della conoscenza.

Infatti, anzitutto la formulazione di un problema matematico può dar origine a nuovi problemi. Per esempio, il problema se ogni numero intero positivo può essere scritto come la somma di non più di quattro quadrati di numeri interi fu risolto da Lagrange un secolo dopo la sua formulazione da parte di Fermat ma, prima di essere risolto, esso diede origine al problema di Waring, che fu risolto soltanto agli inizi del Novecento da Hilbert. In secondo luogo, la formulazione di un problema matematico può dar origine a nuove teorie. Per esempio, l'ultimo teorema di Fermat stimolò Kummer a formulare

la teoria della divisibilità nei corpi di numeri algebrici, e i problemi di Waring e di Goldbach stimolarono lo sviluppo della teoria analitica dei numeri.

La ragione per cui la formulazione di un problema matematico produce di per sé una crescita della conoscenza è che essa suggerisce che tra i dati possono sussistere delle relazioni, e questo costituisce di per sé una crescita della conoscenza. L'eventuale soluzione del problema stabilisce poi che tali relazioni sussistono realmente, e spesso mostra anche perché sussistono.

Inoltre, anche se la formulazione di un problema matematico non garantisce che si riuscirà a risolverlo, la fiducia nella sua solubilità produce la tensione intellettiva che spinge ad occuparsene intensamente. Nessuno dedicherebbe grandi sforzi ad un problema che sapesse essere insolubile. Si può sperare di risolvere solo quei problemi la cui soluzione viene desiderata appassionatamente e che viene ricercata con una grande tensione intellettiva. La ricerca della soluzione di un problema matematico ha una forte componente emotiva che spinge ad impegnarsi intensamente in essa, affrontando anche anni di duro lavoro e amare delusioni. Che «un elemento affettivo sia parte essenziale di ogni scoperta o invenzione è fin troppo evidente, e molti pensatori vi hanno insistito; in effetti, è chiaro che nessuna scoperta o invenzione significativa può aver luogo senza la volontà di scoprire» (Hadamard 1945, 31).

La tensione intellettiva ha una parte essenziale nella scelta stessa dei problemi da indagare. Solo una piccola parte dei problemi matematici che si possono porre ha interesse per i matematici, e la tensione intellettiva serve come guida per discriminare ciò che è interessante da ciò che non lo è, ciò che vale la pena di indagare da ciò che non vale la pena. Una ricerca che non sia guidata da tensione intellettiva finisce inevitabilmente per degenerare e disperdersi in banalità. Senza una scala di interesse delle domande non si può scoprire nulla che abbia valore nella matematica.

4. La soluzione dei problemi matematici

Come si risolvono i problemi matematici? Il procedimento basilare da utilizzare a tale scopo è il metodo analitico, secondo cui, per risolvere un problema, lo si analizza e, in base a tale analisi, si formula un'ipotesi. L'ipotesi costituisce una condizione sufficiente per la soluzione del problema, ma è essa stessa un problema che dev'essere risolto. Per risolverlo si procede nello stesso modo, cioè lo si analizza e, in base a tale analisi, si formula una nuova ipotesi. E così via con un processo potenzialmente infinito.

Sebbene il metodo analitico sia il procedimento basilare per risolvere i problemi matematici, esso non offre ancora una base sufficiente per una logica della scoperta matematica, perché non indica i mezzi per trovare le ipotesi. Il metodo, perciò, dev'essere completato con un'indicazione di tali mezzi.

Abbiamo già detto che questi mezzi devono consistere in certe inferenze non-deduttive. Essi, infatti, non possono consistere nelle inferenze deduttive perché queste sono non-ampliative, cioè la loro conclusione non contiene nulla di essenzialmente nuovo rispetto alle premesse. Invece le ipotesi per la soluzione di un problema, pur essendo formulate a partire da un'analisi del problema, contengono qualcosa di essenzialmente nuovo rispetto ad esso. Perciò le inferenze mediante le quali si trovano le ipotesi devono essere necessariamente non-deduttive.

Ma quali sono le inferenze non-deduttive per trovare le ipotesi? Una risposta a tale domanda verrà data nei capitoli seguenti. Per il momento ci limitiamo a formulare più dettagliatamente il procedimento mediante il quale si risolvono i problemi matematici, tralasciando di specificare le inferenze non-deduttive per trovare le ipotesi. Tale procedimento può essere articolato nei seguenti passi.

1) Si esamina il problema allo scopo di comprenderlo. La comprensione del problema è essenziale per la sua soluzione, perché richiede di capire quale compito occorre affrontare. Capirlo costituisce una condizioni preliminare per pensare ai modi e ai mezzi per risolverlo.

2) Per comprendere il problema si introduce una notazione per esprimerlo o si disegna una figura per rappresentarlo. Scegliendo una notazione per esprimerlo se ne possono considerare più agevolmente i caratteri, agevolandone così la comprensione. Disegnando una figura per rappresentarlo se ne possono vedere più perspicuamente gli aspetti (anche nel caso di problemi non-geometrici), di nuovo agevolandone la comprensione.

3) Si considera il problema da vari punti di vista, se ne mettono in luce le diverse parti, esaminandole separatamente o in relazione tra loro. Si cercano collegamenti tra il problema e la conoscenza esistente, per trarne qualche informazione interessante per la sua soluzione. Ciò porta ad un approfondimento della comprensione del problema, perché questo si arricchisce delle questioni che risultano collegate con esso. Infatti, comprendere vuol dire stabilire collegamenti e scoprire relazioni, costruendo così impalcature per guardare il problema dalla posizione più favorevole. Che l'approfondimento della comprensione di un problema richieda un confronto con la conoscenza esistente è una prima prova del fatto che la soluzione di problemi comporta un'interazione tra più sistemi di conoscenze.

4) Si analizzano ed elencano le caratteristiche generali che deve avere la soluzione del problema. Quali siano queste caratteristiche emerge chiaramente da un'approfondita comprensione del problema. Elencarle, anche se di per sé non permette di trovare un'ipotesi per la soluzione del problema, chiarisce quali condizioni essa deve soddisfare. Questo è utile perché, concentrandosi su queste condizioni, si restringe grandemente lo spazio di ricerca dell'ipotesi.

5) Si esamina se esiste qualche altro problema già risolto che è connesso col problema. Infatti, se il problema già risolto è simile al problema sotto tutti gli aspetti rilevanti, la procedura che ha avuto successo con esso potrebbe averlo anche con il problema. Naturalmente, date le differenze tra i due problemi, occorrerà introdurre qualche modifica nella procedura. Può accadere, inoltre, che vi siano troppi problemi già risolti che sono connessi col problema. In tal caso in prima analisi sarà preferibile dare la priorità a quelli che presentano più punti in comune con esso.

6) In base alle caratteristiche generali che deve avere la soluzione del problema, si formula un'ipotesi per risolverlo per mezzo di qualche inferenza non-deduttiva.

7) Se nessuna delle ipotesi formulate permette di risolvere il problema, si esamina se esse hanno qualche assunto comune. In tal caso si nega l'assunto e se ne esaminano le implicazioni. Può darsi, infatti, che tutte le ipotesi formulate abbiano in comune un assunto che impedisce la soluzione del problema, e che negando l'assunto si possa arrivare ad un'ipotesi più adeguata.

8) Se si arriva ad un'ipotesi che permette di risolvere il problema, si esamina se essa è plausibile, cioè se si accorda con la conoscenza esistente. Infatti, l'ipotesi potrebbe permettere di risolvere il problema proprio in quanto contraddice la conoscenza esistente, perché da una contraddizione si può dedurre qualsiasi cosa. Il confronto con la conoscenza esistente in generale richiede considerazioni esterne al problema. Questa è un'altra una prova del fatto che la soluzione di problemi comporta un'interazione tra più sistemi di conoscenze.

9) Per controllare se l'ipotesi si accorda con la conoscenza esistente può essere necessario dedurne certe conseguenze. Ma la deduzione non dà nuova conoscenza. Serve soltanto per controllare se un'ipotesi già trovata è plausibile, non per trovare nuove ipotesi.

10) Se esistono più ipotesi che si accordano con la conoscenza esistente, in prima istanza si preferisce la più semplice. L'esistenza di più ipotesi è la regola piuttosto che l'eccezione nello sviluppo della matematica. Questo sta all'origine delle spesso accese dispute tra matematici sulla priorità nella scoperta. Che, quando esistono più ipotesi per la soluzione di un problema, in prima istanza si preferisce la più semplice, dipende da ragioni economiche ed estetiche. Questo spiega anche perché, quando la prima soluzione del problema è complicata, non ci si accontenta di essa ma se ne cercano altre più semplici.

11) Se l'ipotesi non si accorda con la conoscenza esistente, si esaminano le ragioni della sua incompatibilità. Questo, infatti, può fornire indicazioni su come formulare una nuova ipotesi.

12) Talvolta, però, l'incompatibilità con la conoscenza esistente è solo apparente. In tal caso esaminare le ragioni dell'incompatibilità può

portare a formulare un'ipotesi più profonda. Per esempio, l'osservazione di Galilei sull'esistenza di una corrispondenza biunivoca tra i numeri interi e i loro quadrati, portò a concludere che l'ipotesi dell'esistenza di insiemi infiniti desse luogo a contraddizioni. Ma tale conclusione si basava sull'assunzione erronea che, dal momento che un insieme finito non poteva essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio, lo stesso dovesse valere per gli insiemi infiniti. Quando si riconobbe l'erroneità di tale assunzione, ciò portò a formulare l'ipotesi più profonda che gli insiemi infiniti sono caratterizzati dal fatto di poter essere messi in corrispondenza biunivoca con un loro sottoinsieme proprio.

13) Anche quando l'ipotesi si accorda con la conoscenza esistente, questo non è conclusivo per l'accettabilità dell'ipotesi. L'accettabilità dipende anche da altri fattori, tra cui in primo luogo la fruttuosità, cioè la capacità di aprire nuove linee di ricerca. Quando l'ipotesi viene riconosciuta, oltre che compatibile con la conoscenza esistente, anche fruttuosa, essa si consolida e diventa stabile. Può esserci però un ritardo tra la formulazione dell'ipotesi e il riconoscimento della sua fruttuosità, spesso a causa del rifiuto di adottare ipotesi innovative. Basti pensare alla resistenza incontrata dall'ipotesi dell'esistenza dei numeri immaginari o complessi, o da quella dell'esistenza dei numeri transfiniti.

14) Anche quando l'ipotesi si consolida e diventa stabile, questo non rappresenta la fine dell'indagine. Infatti, l'ipotesi costituisce a sua volta un problema che richiede una soluzione. Per risolvere tale problema si ritorna al passo 1), e così via all'infinito.

Da questa descrizione appare chiaro che la soluzione di problemi matematici è un processo in base al quale si passa dal dato problema ad altri di profondità sempre crescente, e non ha mai termine. Ciò costituisce una fondamentale differenza tra il metodo analitico e il metodo assiomatico. Quest'ultimo interrompe artificiosamente il processo del passaggio dal dato problema a problemi di profondità sempre crescente quando arriva ad un'ipotesi momentaneamente soddisfacente, considerandola non bisognosa di ulteriori giustificazioni e prendendola come assioma. Il metodo analitico, invece, rimuove tale artificiosa interruzione, riconoscendo che la soluzione di problemi è un compito infinito.

5. Plausibilità della matematica come soluzione di problemi

La tesi che la matematica è soluzione di problemi è plausibile? Una risposta affermativa può essere data in base alle seguenti considerazioni.

1) La tesi è in accordo con l'esperienza matematica. Questa non viene certo spiegata soddisfacentemente dicendo, per esempio, che con la teoria dei numeri noi vogliamo trovare i teoremi deducibili dagli assiomi dell'aritmetica del primo ordine, o che con l'analisi vogliamo trovare i

teoremi deducibili dagli assiomi dell'aritmetica del secondo ordine. Una spiegazione più adeguata si ottiene riconoscendo che, nella ricerca matematica, ci troviamo di fronte ad una massa di fatti noti e di problemi aperti. Aver presenti tali problemi e pensare alla loro soluzione come ad uno scopo da perseguire fornisce un principio organizzativo ed un orientamento sia per apprendere fatti noti sia per scoprire nuovi fatti.

2) La tesi non è confutata dai teoremi di incompletezza di Gödel. Specificamente, non è confutata dal primo teorema di incompletezza, perché non rinchiude la matematica nello spazio chiuso di una data teoria assiomatica, ma la colloca nello spazio aperto di tutta la conoscenza esistente. Non è confutata dal secondo né dal terzo teorema di incompletezza, perché non assume che la conoscenza matematica risultante dalla soluzione di problemi sia globalmente coerente, tanto meno assolutamente certa, ma solo plausibile, né assume che la sua plausibilità debba essere stabilita con mezzi ristretti.

3) La tesi non è vanificata dal cosiddetto paradosso della conoscenza, secondo cui «non è possibile per l'uomo investigare né quello che sa né quello che non sa: quello che sa perché conoscendolo non ha bisogno di cercarlo; quello che non sa perché in tal caso neppure sa che cosa investiga» (Platone, *Meno*, 80 e 2-5). Il paradosso della conoscenza non mostra affatto che la soluzione di problemi è impossibile. Infatti, quello che l'uomo sa sono le soluzioni di certi problemi, ed è vero che, conoscendole, non ha bisogno di cercarle, nondimeno ha bisogno di approfondirle, perché ogni soluzione di un problema non è mai definitiva ma costituisce a sua volta un problema che richiede di essere risolto. D'altra parte, quello che l'uomo non sa sono le soluzioni di certi altri problemi, e il fatto che non le conosca non significa affatto che egli non sappia che cosa cerca.

Poiché la tesi che la matematica è soluzione di problemi è in accordo con l'esperienza matematica, non è confutata dai teoremi di incompletezza di Gödel e non è vanificata dal paradosso della conoscenza, allo stato attuale essa sembra l'unica possibile.

PARTE IV
I PROCEDIMENTI PER TROVARE LE IPOTESI

28
La banalità dell'abduzione

1. Inferenze non-deduttive per trovare le ipotesi

Abbiamo detto che, sebbene il metodo analitico sia il procedimento basilare per risolvere i problemi matematici, esso dev'essere completato con un'indicazione dei mezzi per trovare le ipotesi, e che questi mezzi devono consistere in certe inferenze non-deduttive.

Aggiungiamo ora che le inferenze non-deduttive per trovare le ipotesi non vanno intese nel senso ristretto di operazioni mediante le quali si passa da certe proposizioni ad un'altra proposizione, bensì nel senso generalizzato di operazioni mediante le quali si passa da certi dati ad un altro dato. Una tale generalizzazione del concetto di inferenza è necessaria perché, nel trovare le ipotesi, un ruolo importante è svolto non soltanto dal pensiero verbale ma anche dal pensiero non-verbale e in primo luogo dal pensiero visivo, che non riguarda proposizioni ma dati.

Ma quali sono le inferenze non-deduttive per trovare le ipotesi? In questo capitolo ne considereremo una, la cui rilevanza, però, appare dubbia. Altre più rilevanti verranno considerate nei capitoli successivi.

2. Abduzione e ipotesi

Un'inferenza non-deduttiva per trovare le ipotesi che viene spesso considerata essenziale è l'abduzione. Essa è formulata da Peirce nel modo seguente.

> «Si osserva il fatto sorprendente *C*; ma se *A* fosse vero, *C* sarebbe naturale; perciò si ha motivo di sospettare che *A* sia vero» (Peirce 1931-58, 5.189).

Tale inferenza è non-deduttiva, perché la conclusione *A* non è una conseguenza delle premesse *C* e 'se *A* fosse vero, *C* sarebbe naturale'.

Secondo Peirce, l'abduzione è il «processo mediante il quale si forma un'ipotesi esplicativa» (ivi, 5.171). Perciò essa svolge un ruolo importante nella formazione di teorie e concezioni, perché queste si generano formulando ipotesi. Anzi, l'abduzione comprende «tutte le operazioni mediante le quali si generano teorie e concezioni» (ivi, 5.590). Quindi essa ha un carattere creativo, essendo una «operazione logica che introduce nuove idee» (*ibid.*). Addirittura, secondo Peirce, «tutte le idee della scienza arrivano a quest'ultima tramite l'abduzione» (ivi, 5.145).

Tuttavia, come inferenza non-deduttiva per trovare le ipotesi, l'abduzione è abbastanza banale, perché la conclusione *A* compare già nella premessa 'se *A* fosse vero, *C* sarebbe naturale'. Lo stesso Peirce lo riconosce quando ammette che «*A* non può essere inferito abduttivamente o, se si preferisce, non può essere congetturato abduttivamente prima che il suo intero contenuto sia già presente nella premessa 'se *A* fosse vero, *C* sarebbe naturale'» (ivi, 5.189). Questo sembra vanificare il carattere creativo dell'abduzione.

3. Abduzione e creatività

Che, come inferenza non-deduttiva per trovare le ipotesi, l'abduzione sia abbastanza banale viene però contestato dai sostenitori di Peirce. Per giustificarne il carattere creativo essi usano i seguenti argomenti.

1) Noi siamo arrivati a trovare l'ipotesi *A* solo in quanto cercavamo di dare una spiegazione di *C*. Per esempio, Galilei col suo telescopio osservò punti luminosi che si muovevano nelle vicinanze di Giove, e per spiegarlo formulò l'ipotesi che Giove avesse satelliti. Ma questa ipotesi «non venne in mente a Galilei prima delle sue osservazioni telescopiche; fu inferita da tali osservazioni in un contesto di scoperta» (Achinstein 1980, 112). Questo significa che a Galilei non sarebbe venuto in mente il pensiero *A* che Giove ha satelliti se egli non avesse cercato di dare una spiegazione del fatto *C* che punti luminosi si muovevano nelle vicinanze di Giove.

Questo argomento trascura, però, che, anche ammettendo che, se Galilei non avesse cercato di dare una spiegazione plausibile di *C*, non gli sarebbe mai venuto in mente il pensiero *A*, questo non significa che Galilei incontrò per la prima volta *A* come conclusione di un'inferenza abduttiva. Per poter inferire *A* egli dovette prima convincersi che, se *A* fosse stato vero, *C* sarebbe stato naturale, cioè, dovette prima convincersi che, se Giove avesse avuto satelliti, sarebbe stato naturale che punti luminosi si muovessero nelle vicinanze di Giove. Ma questa implicazione conteneva già *A*.

2) Noi abbiamo scelto l'ipotesi *A*, e tale scelta è un atto creativo. Perché lo sia non occorre «che l'ipotesi selezionata non sia presente tra le

premesse», poiché, «per selezionare o scegliere quell'ipotesi tra le sue vicine, si usa l'evidenza empirica» (Blachowicz 1996, 152). Scegliere un'ipotesi è come scegliere un abito. Osservando con occhio intelligente il cliente, il sarto può individuare, tra gli abiti disponibili nel negozio, quello della taglia più adatta. La sua scelta è un atto creativo, perché un abito già esistente è come se fosse «generato per la prima volta quando viene scelto intelligentemente dal sarto» (*ibid.*). Se nessuno degli abiti disponibili nel negozio è della taglia giusta, il sarto può modificare quello della taglia più vicina eliminando le discrepanze rilevate. Anche questo è un atto creativo, perché l'abito risultante è stato ottenuto con l'aiuto «dell'informazione fornita da queste discrepanze empiriche» (*ibid.*). Parimenti il matematico, per arrivare all'ipotesi *A*, osservando con occhio intelligente il fatto *C*, può scegliere tra le ipotesi già formulate da altri, o più frequentemente modificare una di esse, e ciò «vale come un'inferenza abduttiva ampliativa» (*ibid.*). La disponibilità di ipotesi già formulate è importante perché esse «aiutano a formare una mappa in cui diverrà più facile individuare l'ipotesi desiderata» (*ibid.*). Anche quando le ipotesi già formulate non includono l'ipotesi desiderata, esse comprendono «un certo numero di altre ipotesi che sono vicine a quella desiderata» (*ibid.*). Modificandole si può ottenere l'ipotesi desiderata.

Questo argomento trascura, però, che solo in alcuni casi l'ipotesi *A* che permette di spiegare *C* è inclusa tra quelle già disponibili o si ottiene modificando un'ipotesi già disponibile. In generale *A* è assolutamente nuova. Né si possono enumerare tutte le possibili proposizioni mediante un algoritmo e scegliere *A* tra di esse perché, per ragioni di efficienza, un tale procedimento è inutilizzabile in pratica.

3) La premessa 'se *A* fosse vero, *C* sarebbe naturale' non è il risultato di un'inferenza bensì di un'intuizione creativa istintiva. L'intuizione ci dice che, data l'informazione di sfondo disponibile, se *A* fosse vero, *C* sarebbe naturale. Dunque, «affermare che l'abduzione è un processo logico creativo è dire che il concepimento iniziale di una nuova ipotesi è l'effetto causale» di un'intuizione creativa istintiva che occorre nel corso del processo abduttivo, «non che questo concepimento è il risultato di un'inferenza nell'ambito del processo abduttivo» (Kapitan 1990, 507). Su tale intuizione non possiamo esercitare alcun controllo, trattandosi di «una nuova intuizione incontrollata» (ivi, 506). Esercitiamo un controllo solo «quando decidiamo di 'adottare' l'inferenza, giudicando con ciò che la conclusione è vera in quanto è una conseguenza dell'informazione da cui eravamo partiti» (*ibid.*). Quando lo facciamo, la conclusione «viene inferita ma, come ogni inferenza, l'atto controllato volontario che ha come esito l'accettazione» della conclusione «non sarebbe possibile senza la precedente intuizione creativa istintiva» (ivi, 507).

Questo argomento trascura, però, che, se si assume che la premessa 'se *A* fosse vero, *C* sarebbe naturale' è il risultato di un'intuizione creativa

istintiva, allora l'abduzione viene vanificata come mezzo logico di scoperta delle ipotesi, perché viene fatta dipendere da un processo che, come asserisce lo stesso Peirce, è «subconscio e quindi non è sottoponibile ad un esame logico» (Peirce 1931-58, 5.181). Ciò che differenzia il metodo analitico da quello assiomatico è soprattutto il fatto che quest'ultimo deve far ricorso all'intuizione mentre il metodo analitico no. Fondando la premessa 'se *A* fosse vero, *C* sarebbe naturale' su un'intuizione creativa istintiva si sopprime tale differenza e si basa il metodo analitico su una fonte che non è razionale. Ma così si contraddice la ragione di fondo del metodo analitico: dare una spiegazione razionale del processo della scoperta.

4. Abduzione e *apagogè*

Per dar valore all'abduzione, Peirce la identifica con «ciò che Aristotele intendeva per *apagogè*» (Peirce 1992, 140).

Secondo l'interpretazione corrente, per Aristotele «si ha una *apagogè* quando l'appartenenza del primo termine al termine medio è evidente, ma l'appartenenza del termine medio all'ultimo termine non è evidente, pur essendo più credibile della conclusione» (Aristotele, *Analytica Priora*, B 25, 69 a 20-22). In altri termini, si ha una *apagogè* quando in un sillogismo la premessa maggiore è evidente ma la premessa minore non è evidente, pur essendo più credibile della conclusione.

Un esempio di *apagogè* è dato dal sillogismo la cui premessa maggiore è 'tutte le figure rettilinee sono equivalenti a quadrati', la cui premessa minore è 'tutti i cerchi sono equivalenti a figure rettilinee', e la cui conclusione è 'tutti i cerchi sono equivalenti a quadrati'. In tale sillogismo, la premessa maggiore è evidente, mentre la premessa minore non è evidente ma è più credibile della conclusione «per opera delle lunule» (ivi, B 25, 69 a 32-33). Cioè, è più credibile della conclusione perché, per i risultati di Ippocrate di Chio sulla quadratura delle lunule, certe parti del cerchio sono equivalenti a figure rettilinee.

Questo sillogismo non è ancora una dimostrazione della conclusione, perché fa dipendere quest'ultima da una premessa (la premessa minore) che non è evidente, pur essendo più credibile della conclusione. Nondimeno, è un'approssimazione ad una dimostrazione della conclusione. Perciò con tale sillogismo «ci accade di essere più vicini alla scienza» (ivi, B 25, 69 a 23-24).

Ma Peirce respinge questa interpretazione dell'*apagogè*. A suo parere, l'*apagogè* è «l'inferenza della premessa minore» di un sillogismo «dalle altre due sue proposizioni» (Peirce 1931-58, 7.251). La premessa maggiore e la conclusione devono essere tali che la premessa maggiore è nota e la «conclusione noi la troviamo essere un fatto» (ivi, 7.249). Dunque l' *apagogè* è un'inferenza da una premessa maggiore nota e da una conclusione che è un fatto ad una premessa minore possibile.

Per esempio, nel caso del sillogismo la cui premessa maggiore è 'tutte le figure rettilinee sono equivalenti a lunule', la cui premessa minore è 'il cerchio è equivalente ad una figura rettilinea', e la cui conclusione è 'il cerchio è equivalente a lunule', l'*apagogé* è l'inferenza della premessa minore dalla premessa maggiore e dalla conclusione, dove la premessa maggiore è nota in base ai risultati di Ippocrate di Chio e la conclusione è un fatto.

Con questa interpretazione Peirce può facilmente identificare l'abduzione con l'*apagogè*. In particolare, nell'esempio da lui considerato, l'*apagogé* non è altro che l'abduzione: 'tutte le figure rettilinee sono equivalenti a lunule', 'il cerchio è equivalente a lunule', perciò si ha motivo di sospettare che 'il cerchio è equivalente ad una figura rettilinea'.

Questo modo di intendere l'*apagogé* chiaramente contraddice il testo di Aristotele. Ma, secondo Peirce, non vi è alcuna contraddizione, perché nel manoscritto di Aristotele deve essersi verificata «una di quelle tante cancellazioni dovute all'esposizione all'umidità in una cantina per un secolo, alla quale l'inesatto Apellicone, il primo curatore, supplì con la parola sbagliata» (Peirce 1992, 140). Nella premessa maggiore del sillogismo considerato da Aristotele, 'tutte le figure rettilinee sono equivalenti a quadrati', l'espressione originaria 'equivalenti a lunule' dev'essere stata cancellata dall'umidità, e a tale cancellazione Apellicone deve aver supplito sostituendo erroneamente l'espressione originaria con 'equivalenti a quadrati'.

L'interpretazione di Peirce, però, è assolutamente arbitraria perché l'esempio di Aristotele è perfettamente intelligibile così com'è, e in esso non vi è traccia di abduzione. Lo stesso Peirce alla fine lo riconosce quando chiama «teoria dubbia» la sua ipotesi che «il significato del venticinquesimo capitolo del secondo libro degli *Analytica Priora* di Aristotele sia stato completamente allontanato dal significato di Aristotele da una singola parola sbagliata che è stata inserita da Apellicone dove la parola originaria era illegibile» (Peirce 1931-58, 8.209). Dunque il tentativo di Peirce di dar valore all'abduzione identificandola con ciò che Aristotele intendeva per *apagogè* non ha fondamento.

5. Abduzione e *inventio medii*

Se proprio si vuol istituire un paragone tra l'abduzione e Aristotele, si deve confrontare l'abduzione con un procedimento che Aristotele indica come mezzo per trovare le ipotesi: l'*inventio medii*. Ma tale confronto è sfavorevole all'abduzione.

Come osserva Kapp, contrariamente a quando si ritiene di solito, con la sua sillogistica Aristotele non voleva «partire da combinazioni date di premesse e cercare le inferenze possibili da esse», ma voleva «partire da una

conclusione data e cercare premesse possibili per essa» (Kapp 1967, 71). Quindi, un sillogismo scientifico non porta «da premesse note ad una conclusione fino a quel momento ignota; al contrario, secondo Aristotele, il sillogismo scientifico genuino può avere come sua conclusione un fatto già noto, e la spiegazione scientifica che si doveva dare del fatto noto ne formerà le premesse» (*ibid*.).

Infatti Aristotele dichiara di cercare un metodo che indichi «come troveremo sempre sillogismi per risolvere ogni dato problema, e per quale via potremo assumere le premesse appropriate per ciascun problema» (Aristotele, *Analytica Priora*, A 27, 43 a 20-22). Ma il problema di trovare le premesse appropriate per ciascun problema si riduce a quello di trovare il termine medio di un sillogismo, cioè il termine che compare nelle premesse ma non compare nella conclusione (*inventio medii*). Infatti, una volta trovato il termine medio, si troveranno facilmente le premesse. Perciò «ogni contenuto di un'indagine si riduce alla ricerca del medio» (Aristotele, *Analytica Posteriora*, B 3, 90 a 35). In effetti Aristotele dà alcune regole per tale ricerca.

Ora, tra l'abduzione e l'*inventio medii* vi è una sostanziale differenza. Mentre nell'abduzione la ricerca dell'ipotesi *A* è abbastanza banale perché *A* occorre già nella premessa 'se *A* fosse vero, *C* sarebbe naturale', nell'*inventio medii* la ricerca del termine medio non è affatto banale perché tale termine non compare nella conclusione, che costituisce il fatto noto e il punto di partenza dell'indagine. Dunque, trovare il termine medio vuol dire trovare qualcosa di essenzialmente nuovo, non contenuto già nella conclusione.

Il carattere abbastanza banale della ricerca dell'ipotesi *A* nell'abduzione, paragonato a quello non banale della ricerca del termine medio nel sillogismo, mostra la differenza tra l'abduzione e l'*apagogè* ed evidenzia il carattere abbastanzza banale dell'abduzione come inferenza non-deduttiva per trovare le ipotesi.

29
Le ragioni della logica epicurea

1. La centralità della deduzione

Dal momento che l'abduzione, come inferenza non-deduttiva per trovare le ipotesi, è abbastanza banale, la ricerca delle inferenze non-deduttive per trovare le ipotesi deve rivolgersi in un'altra direzione.

Una prima indicazione in merito è data dagli epicurei, i quali individuano tale direzione nell'induzione e nell'analogia. Essi negano che la logica deduttiva, e specificamente «il sillogismo, sia capace di farci conoscere alcunché» (Epicuro, *De natura*, XXVIII, 17, 1). Al contrario, per loro l'induzione e l'analogia sono essenziali, perché «per la conoscenza di ciò che non cade sotto i sensi dobbiamo fare induzioni sulla base dei dati dell'esperienza. Infatti, tutti i nostri pensieri derivano dalle sensazioni per incidenza, per analogia, per somiglianza, o per unione, con una certa collaborazione del ragionamento» (Diogene Laerzio, *Vitae philosophorum*, X, 32). Per conoscere dobbiamo «usare ciò che è già stato provato, e dopo di questo tutte le cose che sono state ottenute attraverso l'esperienza, con un serio ragionamento induttivo e non prescindendo dal ragionamento induttivo» (Filodemo, *De signis*, fr. 4, 1-5).

Tuttavia gli epicurei non distinguono nettamente tra induzione e analogia, perché considerano l'induzione come un procedimento per analogia. Per questo motivo essi parlano prevalentemente, anche se non esclusivamente, di analogia.

Il ruolo essenziale attribuito dagli epicurei all'induzione e all'analogia sta all'origine della loro controversia con gli stoici, i quali assegnano alla logica deduttiva un ruolo centrale nella conoscenza, negandolo invece all'induzione e all'analogia. Per comprendere i termini della controversia consideriamo, ad esempio, la seguente inferenza.

(A) Poiché gli uomini tra noi sono mortali, gli uomini in qualsiasi luogo sono anch'essi mortali.

Tale inferenza non è deduttiva bensì analogica, perché «quando uno fa un'inferenza partendo dagli uomini tra noi e conclude sugli uomini in qualsiasi luogo che sono mortali, in base al fatto che quelli le cui vite sono note attraverso la storia e quelli che sono caduti sotto la nostra osservazione sono tutti mortali e non esiste alcuna evidenza contraria, egli fa la sua inferenza per analogia» (Filodemo, *De signis*, xvi.31-xvii.3). Infatti assume che gli uomini di cui non abbiamo esperienza siano simili sotto tutti gli aspetti a quelli di cui abbiamo esperienza.

Gli epicurei considerano corretta un'inferenza come (A). Gli stoici, invece, la considerano scorretta, perché «noi non diciamo che, poiché gli uomini tra noi hanno una vita breve, le persone che abitano ad Acotoone», una città sul promontorio del monte Atos i cui abitanti erano di una proverbiale longevità, «hanno anch'esse una vita breve. Se vogliamo stabilire l'inferenza in questione come cogente, dobbiamo dimostrare che gli uomini, nella misura in cui e in quanto sono uomini, sono mortali» (ivi, iv.4-10). Più specificamente, dobbiamo stabilire «che le cose in luoghi non percepiti sono come quelli della nostra esperienza» (ivi, iv.35-37). Poiché ciò in generale è impossibile, «noi non useremo l'inferenza che, poiché gli uomini tra noi sono mortali, gli uomini in Libia sono anch'essi mortali, né tanto meno l'inferenza che, poiché gli esseri viventi tra noi sono mortali, se esistono esseri viventi in Bretagna essi sono mortali» (ivi, v.29-36).

La ragione per cui inferenze del genere, e più in generale l'inferenza (A), sono scorrette, è che la loro conclusione contiene più di quanto è contenuto nella premessa. In un'inferenza corretta si passa dal segno costituente la premessa al segno costituente la conclusione in modo tale che «la conclusione appresa attraverso questo segno non differisce dal segno a partire dal quale traiamo l'inferenza» (ivi, iii.5-8). Dunque, la conclusione non contiene nulla di più di quanto è contenuto nella premessa. Poiché solo le inferenze deduttive soddisfano questo requisito, soltanto esse possono essere corrette.

Perciò gli stoici ne concludono che, solo trasformando (A) in un'inferenza deduttiva, essa può diventare corretta. A tale scopo occorre aggiungere alla premessa di (A) una nuova premessa non evidente, cioè 'Gli uomini di cui non abbiamo esperienza sono sotto tutti gli aspetti simili a quelli di cui abbiamo esperienza'. Infatti, «o includete il non evidente e dite, 'Poiché tutti gli uomini sono simili agli uomini tra di noi anche per il fatto di essere mortali, tutti gli uomini devono essere mortali', oppure tralasciandolo non farete alcun passo avanti nel vostro ragionamento» (ivi, xix.36-xx.4). Dunque (A) dev'essere riformulata come: 'Poiché gli uomini tra noi sono mortali, se gli uomini di cui non abbiamo esperienza sono sotto tutti gli

aspetti simili a quelli di cui abbiamo esperienza, gli uomini in qualsiasi luogo sono anch'essi mortali'. In tal modo (A) viene trasformata in un'inferenza deduttiva.

2. La necessità dell'induzione e dell'analogia

A queste critiche gli epicurei rispondono che non solo l'inferenza analogica per diventare corretta non dev'essere trasformata in un'inferenza deduttiva, ma anzi l'inferenza deduttiva dipende dal metodo dell'analogia.

Contro l'argomento che, per ottenere la correttezza, alla premessa evidente di (A) si deve aggiungere la premessa non evidente, 'Gli uomini di cui non abbiamo esperienza sono sotto tutti gli aspetti simili a quelli di cui abbiamo esperienza', gli epicurei obiettano che non c'è alcun bisogno di aggiungere tale premessa perché, quando inferiamo, dal fatto che gli uomini tra noi sono mortali, che gli uomini in qualsiasi luogo sono anch'essi mortali, facciamo un'inferenza empirica che è corretta in quanto allo stato attuale non esiste alcuna evidenza contraria.

Infatti, «quando dalla proposizione, 'Gli uomini tra noi sono mortali', inferiamo, 'Gli uomini in qualsiasi luogo sono anch'essi mortali', noi non assumiamo in anticipo né che gli uomini intorno a cui inferiamo sono simili a quelli tra noi anche rispetto alla mortalità, né che essi somigliano a loro sotto tutti gli altri aspetti ma differiscono da loro rispetto alla mortalità. Invece, prendendo ciò che hanno in comune, dal fatto che tutti gli uomini tra noi sono simili anche nell'essere mortali, noi inferiamo che in generale tutti gli uomini sono soggetti alla morte, perché nulla si oppone a tale inferenza o ci sospinge neppure di un passo verso l'idea che essi non sono soggetti alla morte» (ivi, xvi.5-25). Cioè, lo inferiamo perché non esiste alcuna evidenza contraria.

Dunque l'inferenza (A), per diventare corretta, non deve affatto essere trasformata in un'inferenza deduttiva ma è già corretta così com'è, perché allo stato attuale non esiste alcuna evidenza contraria, dove «la mancanza di evidenza contraria consiste nella coerenza con i dati dell'esperienza quando l'oggetto dell'opinare non sia attingibile dai sensi» (Sesto Empirico, *Adversus Mathematicos*, vii.213). In generale, «il metodo dell'analogia è corretto a questa condizione, che nessuno degli altri fenomeni o fatti precedentemente dimostrati a partire da essi sia in conflitto con l'inferenza» (Filodemo, *De signis*, xxxii.22-27).

Inoltre, pretendendo che (A) possa diventare corretta solo aggiungendo alla sua premessa la nuova premessa, 'Gli uomini di cui non abbiamo esperienza sono sotto tutti gli aspetti simili a quelli di cui abbiamo esperienza', gli stoici trascurano che tale nuova premessa può essere stabilita solo mediante un'inferenza analogica. Infatti, se essi ammettono che, non solo tutti gli uomini tra noi, ma in generale «tutti gli uomini sono soggetti alle

ferite, alla malattia, alla vecchiaia e alla morte, e che non vi sono centauri né Pan né altre cose del genere, essi non possono confermare queste affermazioni con alcun altro metodo se non col metodo dell'analogia» (ivi, xxxi.26-34). Dunque le inferenze che gli stoici considerano corrette presuppongono il metodo dell'analogia perché hanno premesse che possono essere stabilite solo mediante tale metodo. Pertanto, mentre gli stoici ritengono che (A) possa diventare corretta solo trasformandola in un'inferenza deduttiva, al contrario è l'inferenza deduttiva che dipende dal metodo dell'analogia, e quindi è subordinata ad esso.

Perciò, secondo gli epicurei, «non vi è alcuna necessità di includere il non apparente, dicendo, 'Poiché gli uomini, in qualunque luogo si trovino, sono simili agli uomini tra noi anche nell'essere mortali, tutti devono essere mortali'. Né io assumerò in anticipo l'opposto di tale asserzione; ma, mediante un'inferenza empirica dalle apparenze, arriverò all'idea che debba esserci una somiglianza anche sotto questo aspetto. Infatti, poiché questa proprietà segue per gli uomini tra noi, io giudicherò con certezza che essa segue per tutti gli uomini, confermando con un'inferenza empirica che la somiglianza deve esistere anche sotto questo aspetto» (ivi, xxii.29-xxiii.7). Certo, si tratta soltanto di una certezza empirica, ma è l'unico tipo di certezza che è data agli uomini.

La certezza empirica è giustificata, comunque, dal fatto che, sebbene tra gli uomini si possano riscontrare anche notevoli differenze, queste si mantengono sempre entro limiti ristretti. Ciò rende ragionevole attendersi che, se tutti gli uomini tra noi sono mortali, gli uomini in qualsiasi luogo siano anch'essi mortali, perché la differenza tra gli uomini tra noi e gli uomini in qualsiasi luogo non può essere così grande come quella tra l'essere mortale e l'essere immortale. Per la stessa ragione noi non possiamo arrivare a concepire «uomini che sono fatti di ferro e che camminano attraverso i muri così come noi camminiamo attraverso l'aria» (ivi, xxi.37-xxii.2). Né possiamo arrivare a concepire uomini che «mangiano fieno e sono nutriti da esso e lo digeriscono facilmente» (ivi, xxvi.8-9). È troppo grande, infatti, la differenza tra gli uomini tra noi ed esseri dotati di tali proprietà.

Quanto al numero dei casi che occorre considerare perché il metodo dell'analogia conduca ad inferenze corrette, esso varia da situazione a situazione. A volte persino un singolo caso osservato può costituire una base adeguata per l'inferenza analogica, altre volte bastano solo alcuni casi osservati. Infatti, talora «incontrando un singolo esempio si dirà che questa particolare cosa ha un tale carattere; spesso sono sufficienti due esempi, e talvolta di più» (ivi, xxvi.34-37). Per converso, a volte neppure un gran numero di casi riesce ad eliminare ogni incertezza, perché «una cosa non sempre viene negata quando c'è stato un gran numero di occorrenze» (ivi, xxvi.32-34).

Comunque, poiché spesso il metodo dell'analogia conduce ad inferenze corrette, «non ci si deve fermare alle cose evidenti, ma partendo da esse si devono fare inferenze su ciò che non è apparente, e non si deve diffidare delle cose ottenute attraverso esse per analogia, ma si deve aver fiducia in esse così come si ha fiducia nelle cose a partire dalle quali è stata effettuata l'inferenza» (ivi, fr. 2, 1-6). Dunque si deve aver fiducia nell'analogia.

30
L'induzione

1. Il ruolo dell'induzione

Dopo gli epicurei, l'importanza dell'induzione e dell'analogia come inferenze non-deduttive per trovare le ipotesi è stata ripetutamente sottolineata. Per esempio, Laplace afferma che tutte le nuove conoscenze, «persino nelle scienze matematiche, ci sono date dall'induzione e dall'analogia» (Laplace 1878-1912, VII, 5).

Consideriamo anzitutto l'induzione. Il suo ruolo nella scoperta matematica è stato riconosciuto da parecchi matematici, a cominciare da Euler secondo cui «moltissime proprietà dei numeri che finora abbiamo conosciuto ci sono diventate note per la prima volta solo attraverso le osservazioni, e questo molto tempo prima che confermassimo la loro verità con dimostrazioni rigorose» (Euler 1915-44, I, 459). Per esempio, Fermat inferì varie «esimie proprietà dei numeri per induzione molto prima che avesse imparato a dimostrarle» (ivi, I, 461). Inoltre, «ci sono note molte proprietà dei numeri che però non siamo ancora in grado di dimostrare; dunque siamo stati portati alla loro conoscenza solo dalle osservazioni» (ivi, I, 459). Perciò, «nell'indagare la natura dei numeri, si deve attribuire moltissimo all'osservazione e all'induzione, a cui dobbiamo attribuire tutte queste elegantissime proprietà ricevute, e perciò ora non si deve certo desistere dal proseguire ulteriormente questa attività» (ivi, I, 461).

Dopo Euler il ruolo dell'osservazione e dell'induzione è stato ripetutamente ribadito, fino all'età contemporanea, nella quale «molti specialisti di teoria dei numeri percepiscono e praticano la loro disciplina come una scienza sperimentale» (Williams 1982, 75). Per risolvere un problema essi spesso computano tabelle di numeri, «alcuni dei numeri di queste tabelle presentano un certo andamento, e questo può indicare come si può sviluppare una possibile ipotesi relativa al problema. Se i computi successivi confermano tale ipotesi, lo specialista di teoria dei numeri ha buone ragioni per credere di avere a disposizione un teorema» (*ibid.*). Infatti,

«i numeri di queste tabelle spesso danno un qualche tipo di idea su come debba procedere una dimostrazione. La velocità e la potenza dei moderni computer rendono fattibile questo programma di ricerca anche quando (come spesso accade) si devono effettuare molti calcoli lunghi e noiosi» (*ibid.*).

Dunque l'induzione sta alla base dei procedimenti di soluzione di problemi di molti specialisti contemporanei di teoria dei numeri.

2. Le obiezioni contro l'induzione

Sebbene il ruolo dell'induzione come inferenza non-deduttiva per trovare le ipotesi sia stato riconosciuto da parecchi matematici, fin dall'antichità contro di essa sono state avanzate obiezioni.

Abbiamo già visto quella degli stoici relativa all'inferenza, 'Poiché gli uomini tra noi sono mortali, gli uomini in qualsiasi luogo sono anch'essi mortali'. Secondo gli stoici tale inferenza è scorretta, e diventa corretta solo aggiungendo alla sua premessa la nuova premessa, 'Gli uomini di cui non abbiamo esperienza sono sotto tutti gli aspetti simili a quelli di cui abbiamo esperienza'.

L'obiezione degli stoici è ripresa da Hume, secondo cui un'inferenza in base alla quale, dal fatto che una proprietà vale nei casi di cui abbiamo avuto esperienza, si conclude che essa vale anche nei casi di cui non abbiamo avuto alcuna esperienza, è scorretta e può diventare corretta solo aggiungendo alla sua premessa la seguente nuova premessa.

(A) «I casi di cui non abbiamo avuto alcuna esperienza devono somigliare a quelli di cui abbiamo avuto esperienza» (Hume 1978, 89).

Ma allora nasce il problema di come giustificare la verità di (A), e tale problema, secondo Hume, non ammette alcuna soluzione soddisfacente, perché tutti i modi di giustificare la verità di (A) sono inadeguati.

Infatti, la verità di (A) non può essere giustificata dimostrando (A), ossia deducendola da premesse che sappiamo essere vere, perché le uniche premesse che sappiamo essere vere sono quelle relative ai casi di cui abbiamo avuto esperienza. E da premesse del genere non potremmo mai dedurre (A), perché questa si riferisce ai casi di cui non abbiamo avuto alcuna esperienza. Perciò «non possono esserci argomenti dimostrativi per provare che quei casi di cui non abbiamo avuto alcuna esperienza somigliano a quelli di cui abbiamo avuto esperienza» (*ibid.*).

Né la verità di (A) può essere giustificata basandosi sull'esperienza, perché se alla domanda, 'Come si giustifica un'inferenza in base alla quale, dal fatto che una proprietà vale nei casi di cui abbiamo avuto esperienza, si conclude che essa vale anche nei casi di cui non abbiamo avuto alcuna

esperienza?', si rispondesse, 'In base all'esperienza', «io ripeterei la mia domanda, 'Perché da questa esperienza noi formiamo una conclusione che va al di là di quei casi passati di cui abbiamo avuto esperienza?' Se si risponde a questa domanda nello stesso modo che alla precedente, tale risposta fornisce di nuovo l'occasione per una nuova domanda dello stesso tipo, e così via all'infinito» (ivi, 91).

Poiché tutti i modi di giustificare (A) sono inadeguati, Hume ne conclude che, quando l'esperienza ci dice che una proprietà vale in certi casi, «per noi è impossibile convincerci con la nostra ragione del perché dovremmo estendere quell'esperienza al di là di quei casi particolari che sono caduti sotto la nostra osservazione. Noi supponiamo, ma non siamo mai in grado di provare, che vi debba essere una somiglianza tra quegli oggetti di cui abbiamo avuto esperienza e quelli che sono al di là delle nostre possibilità di scoperta» (ivi, 91-92). Poiché non siamo mai in grado di provare che vi debba essere una tale somiglianza, non vi è alcun modo di rendere corretta un'inferenza in base alla quale, dal fatto che una proprietà vale nei casi di cui abbiamo avuto esperienza, si conclude che essa vale anche nei casi di cui non abbiamo avuto alcuna esperienza.

L'obiezione di Hume assume, però, che un'inferenza debba condurre da premesse vere ad una conclusione vera. Per questo motivo, secondo Hume, un'inferenza induttiva che, dal fatto che una proprietà vale nei casi di cui abbiamo avuto esperienza, conclude che essa vale anche nei casi di cui non abbiamo avuto alcuna esperienza, dev'essere trasformata in un'inferenza deduttiva. A tale scopo si deve aggiungere alla premessa di tale inferenza induttiva la nuova premessa (A), e ciò fa nascere il problema di giustificare la verità di (A).

Ma, come osservato già dagli epicurei, un'inferenza induttiva non è corretta nel senso che conduce da premesse vere ad una conclusione vera, bensì nel senso che conduce da premesse vere ad una conclusione contro la quale, allo stato attuale, non esiste evidenza contraria. Ora, un'inferenza induttiva in base alla quale, dal fatto che una proprietà vale nei casi di cui abbiamo avuto esperienza, si conclude che essa vale anche nei casi di cui non abbiamo avuto alcuna esperienza, in questo senso è giustificata.

L'obiezione di Hume nasce da un ingenuo desiderio di certezza in un mondo dominato dall'incertezza. Hume vorrebbe che un'inferenza induttiva con premesse vere avesse una conclusione vera, perché soltanto così essa sarebbe assolutamente giustificata. E ovviamente scopre che l'inferenza induttiva non ha questa proprietà. Ma in questo modo egli cede al pregiudizio che l'induzione debba essere uno strumento infallibile di giustificazione, piuttosto che uno strumento fallibile di scoperta di nuove ipotesi.

3. Il pregiudizio contro l'induzione

Questo pregiudizio ha influenzato profondamente la filosofia contemporanea.

Ciò si vede, ad esempio, da Reichenbach, secondo cui «l'inferenza induttiva non viene usata per scoprire una teoria, ma per giustificarla in termini dei dati osservativi» (Reichenbach 1951, 231). Dunque Reichenbach considera l'inferenza induttiva non come uno strumento di scoperta di nuove ipotesi bensì come uno strumento di giustificazione. Questo è tanto più sorprendente in quanto lo stesso Reichenbach riconosce che «l'induzione è lo strumento di un metodo scientifico che vuol scoprire qualcosa di nuovo, qualcosa di più di un sommario di osservazioni già fatte» (ivi, 229). Se da un lato una caratteristica dell'inferenza induttiva è «la mancanza di necessità del suo metodo e la possibilità di conclusioni false», dall'altro lato questo è il prezzo che occorre pagare per il fatto che «ciò che distingue l'inferenza induttiva da quella deduttiva è che essa non è vuota, porta a conclusioni non contenute nelle premesse» (*ibid.*). Ma questo riconoscimento di Reichenbach contrasta con la sua affermazione che l'inferenza induttiva non è uno strumento di scoperta di nuove ipotesi bensì uno strumento di giustificazione.

A causa del pregiudizio che l'inferenza induttiva debba essere uno strumento di giustificazione, Popper arriva addirittura ad affermare che «l'induzione semplicemente non esiste», perché «non esiste alcun esempio di inferenza induttiva valida» (Popper 1974, 1015). Infatti, «nessuna regola può mai garantire che una generalizzazione inferita da osservazioni vere, per quanto spesso ripetute, sia vera» (Popper 1972, 53). Perciò, secondo Popper, «il successo della scienza non si basa sulle regole di induzione, ma sulla fortuna, sull'ingegnosità e sulle regole puramente deduttive dell'argomentazione critica» (*ibid.*). Ma questa conclusione di Popper è ingiustificata, perché l'argomento che non esiste alcun esempio di inferenza induttiva valida, cioè di inferenza che porta necessariamente da premesse vere ad una conclusione vera, non prova che l'induzione non può essere uno strumento di scoperta di nuove ipotesi, ma solo che, come è ovvio, essa non può essere uno strumento infallibile di giustificazione.

4. Induzione e certezza

Anche quando, nell'ambito della filosofia contemporanea, si riconosce che l'inferenza induttiva è principalmente uno strumento di scoperta di nuove ipotesi, essa viene intesa in modo restrittivo, a causa del pregiudizio che un'inferenza debba portare necessariamente da premesse vere ad una conclusione vera.

Ciò si vede, ad esempio, dai tentativi di mostrare l'esistenza di un'induzione meccanica, ossia di un'induzione intesa come un metodo meccanico per ottenere in modo infallibile leggi scientifiche da una gran massa di dati precedentemente raccolti. L'idea di una tale induzione risale a Bacon, secondo cui grazie ad essa la scienza sarebbe diventata quasi un

lavoro di routine, perché un'induzione meccanica sarebbe stata tale «da non lasciare molto posto all'acutezza e alla forza degli ingegni, ma da rendere quasi eguali gli ingegni e gli intelletti» (Bacon 1961-86, I, 172). Dal canto loro, gli attuali continuatori di Bacon considerano l'induzione meccanica «particolarmente adatta per quei compiti di formazione di teorie scientifiche in cui la comprensibilità della conoscenza generata è essenziale per il progresso di soggetti scientifici» (Muggleton-de Raedt 1994, 666).

Ma intendere l'induzione come un'induzione meccanica è restrittivo, perché l'induzione meccanica è riducibile in linea di principio alla deduzione. Tutti i risultati ottenuti per mezzo di essa potrebbero essere ottenuti mediante l'algoritmo del British Museum. Ma, che l'induzione sia riducibile in linea di principio alla deduzione in certi casi molto particolari, non significa che essa sia riducibile all'induzione in tutti i casi, e non rende conto della fondamentale caratteristica dell'induzione di essere, a differenza della deduzione, ampliativa.

Dietro la concezione di Bacon di un'induzione meccanica vi era la pretesa che l'induzione dovesse portare alla certezza. Secondo Bacon «l'induzione di cui parlano i logici» mediante la quale «si può pretendere che si scoprano i principi della scienza», ossia la generalizzazione basata su un'enumerazione incompleta di casi particolari, è «assolutamente scorretta ed incapace», perché «una conclusione ottenuta in base ad un'enumerazione di particolari senza esempi contraddittori non è una conclusione ma una congettura; chi può assicurare infatti (in molti campi) sulla base di quei particolari che risultano da un lato, che non ve ne siano altri dal lato contrario che non risultano?» (Bacon 1961-86, III, 387). Perciò un'induzione che non porti alla certezza è inutile.

Ma la pretesa che l'induzione debba portare alla certezza è insostenibile, perché è incompatibile con la fondamentale esigenza che l'induzione sia ampliativa. Come sottolinea Mill, l'induzione «procede dal noto all'ignoto; e qualsiasi operazione che non comporti un'inferenza, qualsiasi processo in cui quella che sembra la conclusione non sia più ampia delle premesse da cui è tratta, non rientra nel significato del termine» (Mill 1963-86, VII, 288). Ma se l'induzione dev'essere ampliativa, allora per il paradosso dell'inferenza non può essere corretta, e quindi non può portare alla certezza.

L'induzione può avere varie forme. In seguito ne considereremo due, che svolgono un ruolo particolarmente importante nella scoperta delle ipotesi matematiche.

5. L'induzione da più casi

Il tipo più comune di induzione è l'induzione da più casi. Essa può essere illustrata considerando, ad esempio, il seguente problema.

(B) Qual è il valore della somma dei primi n numeri dispari?

Per risolverlo osserviamo che,

$$1=1^2$$
$$1+3=2^2$$
$$1+3+5=3^2$$
$$1+3+5+7=4^2$$
$$1+3+5+7+9=5^2$$
$$1+3+5+7+9+11=6^2$$

Questo ci suggerisce, per risolvere il problema (B), di formulare la seguente ipotesi.

(C) Il valore della somma dei primi n numeri dispari è n^2;
cioè $1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$.

Tale ipotesi è stata ottenuta per induzione a partire dai sei casi sopra considerati.

In generale, l'induzione da più casi è espressa dal seguente schema.

Da $P(a_1),\ldots,P(a_n)$ si può inferire $P(b)$, dove $a_1,\ldots,a_n,b$ sono membri di un dato insieme Q.

Nell'esempio precedente $P(n)$ è la proprietà $1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$; Q è l'insieme dei numeri interi positivi. Per induzione da più casi, da $P(1),\ldots,P(6)$ si inferisce $P(n)$ per ogni numero intero positivo n, ossia (C).

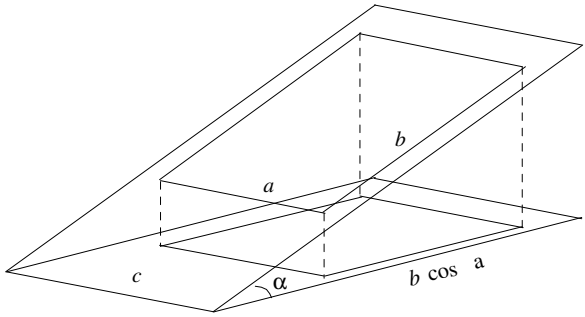
6. L'induzione da un solo caso

Un caso limite di induzione è l'induzione da un solo caso, che svolge il ruolo di caso paradigmatico. Essa può essere illustrata considerando, ad esempio, il seguente problema.

(D) Dato un poligono di superficie S in un piano che forma un angolo α con un altro piano, qual è la superficie della proiezione del poligono su quest'altro piano?

Il problema è reso più complicato dal fatto che esso si riferisce ad un poligono qualsiasi. Il problema, però, può essere facilmente risolto nel caso speciale che il poligono sia un rettangolo la cui base è parallela alla linea di

intersezione c del piano del rettangolo col piano della proiezione del rettangolo. Infatti, se a è la base del rettangolo, b è la sua altezza, e perciò ab è la sua superficie, le quantità corrispondenti ad a, b e ab nel piano della proiezione saranno rispettivamente a, $b\cos\alpha$ e $ab\cos\alpha$.



Questo ci suggerisce, per risolvere il problema (D), di formulare la seguente ipotesi.

(E) Se la superficie del poligono è S, la superficie della proiezione del poligono sul secondo piano è $S\cos\alpha$.

Tale ipotesi è stata ottenuta per induzione a partire dal solo caso costituito dal rettangolo, quindi da un solo tipo di poligono.

In generale, l'induzione da un solo caso è espressa dal seguente schema.

Da $P(a)$ si può inferire $P(b)$, dove a e b sono membri di un dato insieme Q.

Nell'esempio precedente $P(p)$ è la proprietà: se la superficie del poligono p è S, la superficie della sua proiezione sul secondo piano è $S\cos\alpha$; Q è l'insieme dei poligoni. Per induzione da un solo caso, da $P(r)$, dove r è un rettangolo, si inferisce $P(p)$ per ogni poligono p, cioè (E).

7. Induzione e probabilità

L'efficacia dell'induzione da un solo caso mostra i limiti dell'opinione diffusa secondo cui «l'inferenza induttiva dev'essere concepita come un'operazione che rientra nel quadro del calcolo della probabilità» (Reichenbach 1951,

233). Se si intende per probabilità il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili, la conclusione di un'induzione da un solo caso ha una probabilità che, quando il numero dei casi possibili è molto grande, è molto piccola. Dunque la fecondità di questo tipo di induzione risulterebbe inspiegabile se si concepisse l'inferenza induttiva come un'operazione che rientra nel quadro del calcolo delle probabilità.

Concependola in tal modo, saremmo portati a ritenere che dobbiamo «scegliere le nostre assunzioni in modo che esse siano vere il più spesso possibile», e quindi che dobbiamo scegliere l'ipotesi più probabile, perché «il grado di probabilità fornisce una valutazione dell'ipotesi; ci dice quanto è buona l'ipotesi» (ivi, 240). Ma in base a tale criterio non avremmo mai potuto scegliere un'ipotesi come (E), perché questa, essendo stata ottenuta per induzione da un solo caso, ha una probabilità nulla dal momento che i casi di poligoni possibili sono infiniti. Questo mostra l'implausibilità di tale criterio, e quindi dell'opinione diffusa secondo cui l'inferenza induttiva dev'essere concepita come un'operazione che rientra nel quadro del calcolo della probabilità.

31
L'analogia

1. Il ruolo dell'analogia

Dopo l'induzione consideriamo l'analogia. Anche contro di essa sono state sollevate obiezioni simili a quelle contro l'induzione, ma molti ne hanno sottolineato il ruolo centrale nella matematica. Per esempio, Kepler dichiara che «devono aiutarci le voci geometriche dell'analogia. Infatti, più di ogni altra cosa mi sono care le analogie, le mie più fidate maestre che conoscono in particolare tutti i segreti della natura. Noi dobbiamo cercarle soprattutto nella geometria quando, sebbene mediante designazioni molto assurde, esse unificano infiniti casi tra i loro estremi ed il medio, e quando ci presentano distintamente tutta l'essenza di una cosa qualsiasi» (Kepler 1938- , II, 93).

L'analogia può avere varie forme. In seguito ne considereremo alcune che svolgono un ruolo particolarmente importante nella scoperta delle ipotesi matematiche.

2. L'analogia per quasi-eguaglianza

Un primo tipo di analogia è l'analogia per quasi-eguaglianza. Essa può essere illustrata, ad esempio, mediante il seguente problema.

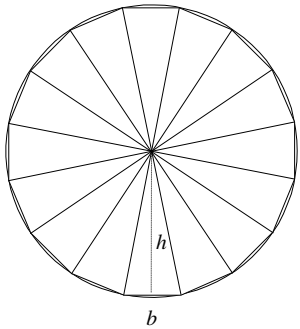
(A) Qual è la circonferenza del cerchio?

Per risolvere tale problema formuliamo la seguente ipotesi, dove c è la circonferenza del cerchio, r il suo raggio, π il rapporto tra la superficie del cerchio e il quadrato r^2 del suo raggio.

(B) $c = 2\pi r$.

Come possiamo essere arrivati a formulare tale ipotesi, che non è affatto evidente? Una spiegazione plausibile è la seguente.

Inscriviamo nel cerchio un poligono regolare di n lati. Il poligono può considerarsi composto da n triangoli isosceli aventi tutti la stessa base b e la stessa altezza h.



Detto p il perimetro del poligono, si ha allora,

$$(1) \quad \text{superficie del poligono } = n\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(nb)h = \frac{1}{2}ph\,.$$

Col crescere di n, il perimetro p del poligono approssima sempre di più la circonferenza c del cerchio, e l'altezza h dei triangoli che lo compongono approssima sempre di più il raggio r del cerchio. Perciò, per n molto grande, il poligono e il cerchio sono quasi-eguali. In virtù di ciò, per analogia per quasi-eguaglianza, da (1) possiamo inferire,

$$(2) \quad \text{superficie del cerchio } = \frac{1}{2}cr\,.$$

D'altra parte, poiché π è il rapporto tra la superficie del cerchio e il quadrato r^2 del suo raggio, si ha,

$$(3) \quad \text{superficie del cerchio } = \pi r^2\,.$$

Da (2) e (3) si ottiene $\frac{1}{2}cr = \pi r^2$, donde $c = 2\pi r$, cioè (B).

In generale, l'analogia per quasi-eguaglianza è espressa dal seguente schema.

Da $P(a)$ e da 'a e b sono quasi-eguali', si può inferire $P(b)$.

Nell'esempio precedente $P(a)$ è la proprietà: 'superficie di $a = \frac{1}{2}(\text{perimetro di } a) \times (\text{altezza di } a)$', dove, se a è un cerchio, il perimetro di a è la circonferenza di a e l'altezza di a è il raggio di a. Per analogia per quasi-eguaglianza, dal fatto che, per n molto grande, un poligono regolare di n lati è quasi-eguale al cerchio in cui è inscritto, da (1) si può inferire (2), donde si ottiene (B).

3. L'analogia per indistinguibilità separata

Un altro tipo di analogia è l'analogia per indistinguibilità separata. Essa può essere illustrata, ad esempio, mediante il seguente problema.

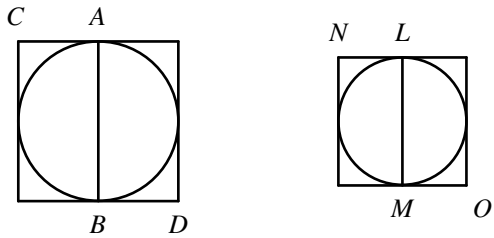
(C) Qual è la superficie della lunula ottenuta tracciando un semicerchio sulla base di un triangolo rettangolo isoscele e tracciando un semicerchio su uno degli altri due lati?

Come si è già detto, per risolvere tale problema Ippocrate di Chio introdusse la seguente ipotesi.

(D) I cerchi stanno tra loro come i quadrati sui loro diametri.

Come Ippocrate di Chio può essere arrivato a formulare tale ipotesi, che non è affatto evidente? Una spiegazione plausibile è la seguente.

Dato un cerchio di diametro AB, sia CD il quadrato sul diametro circoscritto ad esso. Parimenti, dato un cerchio di diametro LM, sia NO il quadrato sul diametro circoscritto ad esso.



Possiamo esprimere la relazione tra le due figure, $ABCD$ e $LMNO$, dicendo che esse hanno la stessa forma. O meglio, come suggerisce Leibniz,

prescindendo dall'ambiguo concetto di forma possiamo esprimere la relazione tra tali figure dicendo che esse sono indistinguibili se osservate separatamente, cioè che «non si può osservare nell'una, vista singolarmente, nulla che non si possa osservare egualmente nell'altra» (Leibniz 1971, V, 181).

Poiché $ABCD$ e $LMNO$ sono indistinguibili se osservate separatamente, per analogia per indistinguibilità separata, dal fatto che il cerchio AB sta al quadrato CD in un certo rapporto, si può inferire che il cerchio LM sta al quadrato NO in quello stesso rapporto, e viceversa. Dunque si può inferire che il cerchio AB sta al quadrato CD nello stesso rapporto in cui il cerchio LM sta al quadrato NO. Ne segue che il cerchio AB sta al cerchio LM come il quadrato CD sta al quadrato NO, cioè (D).

In generale, l'analogia per indistinguibilità separata è espressa dal seguente schema.

> Da $P(a)$ e da 'a e b sono indistinguibili se osservati separatamente', si può inferire $P(b)$.

Nell'esempio precedente $P(ABCD)$ è la proprietà 'il cerchio AB sta al quadrato CD nel rapporto r' e $P(LMNO)$ è la proprietà 'il cerchio LM sta al quadrato NO nel rapporto r'. Per analogia per indistinguibilità separata, poiché le figure $ABCD$ e $LMNO$ sono indistinguibili se osservate separatamente, da $P(ABCD)$ si può inferire $P(LMNO)$, e viceversa da $P(LMNO)$ si può inferire $P(ABCD)$. Perciò $P(ABCD) \leftrightarrow P(LMNO)$, dunque il cerchio AB sta al quadrato CD nello stesso rapporto in cui il cerchio LM sta al quadrato NO. Da ciò, come già detto, si conclude che il cerchio AB sta al cerchio LM come il quadrato CD sta al quadrato NO.

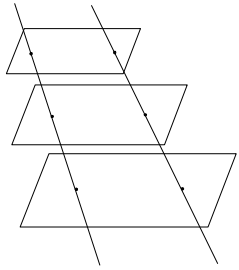
4. L'analogia per equiproporzionalità

Un altro tipo di analogia è l'analogia per equiproporzionalità. Essa può essere illustrata, ad esempio, mediante il seguente problema.

> (E) Se due rette nello spazio sono tagliate da tre piani paralleli, in che rapporto stanno tra loro i segmenti risultanti?

Per risolvere tale problema introduciamo la seguente ipotesi.

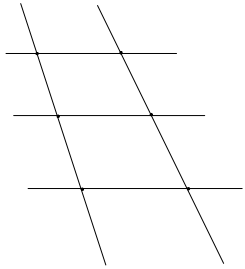
(F) Se due rette nello spazio sono tagliate da tre piani paralleli, i segmenti risultanti sono proporzionali tra loro.



Come possiamo essere arrivati a formulare tale ipotesi, che non è affatto evidente? Una spiegazione plausibile è la seguente.

Osserviamo anzitutto che vale il seguente fatto.

(1) Se due rette nel piano sono tagliate da tre rette parallele, i segmenti risultanti sono proporzionali tra loro.



D'altra parte, chiaramente vale anche il seguente fatto.

(2) La retta sta al piano come il piano sta allo spazio.

Ma allora, per analogia per equiproporzionalità, da (1) e (2) possiamo inferire (F).

In generale, l'analogia per equiproporzionalità è espressa dal seguente schema.

Da $P(a,b)$ e da 'a sta a b come c sta a d', si può inferire $P(c,d)$.

Nell'esempio precedente $P(a,b)$ è la relazione: 'se due rette nel piano *b* sono tagliate da rette *a* parallele, i segmenti risultanti sono proporzionali tra loro'. Per analogia per equiproporzionalità, da $P(a,b)$ e dal fatto che le rette *a* stanno al piano *b* come il piano *b* sta allo spazio *c*, si può inferire $P(c,d)$, cioè (F).

Si noti che, nello schema dell'analogia per equiproporzionalità, la relazione '*a* sta a *b* come *c* sta a *d*' non va confusa con la proporzione matematica '$a:b=c:d$'. In quest'ultima, infatti, ciascun termine è determinato univocamente dai tre termini rimanenti, mentre questo non vale nel caso della relazione '*a* sta a *b* come *c* sta a *d*'. Per esempio, non solo «la vecchiaia sta alla vita come la sera sta al giorno», ma la vecchiaia sta alla vita come il tramonto sta al giorno, perché si può chiamare «la vecchiaia la sera della vita o il tramonto della vita» (Aristotele, *Poetica*, 21, 1457 b 22-25).

5. L'analogia per concordanza

Un altro tipo di analogia è l'analogia per concordanza. Essa può essere illustrata, ad esempio, mediante il seguente problema.

(G) Qual è la somma degli angoli interni di un pentagono?

Per risolverlo formuliamo la seguente ipotesi.

(H) La somma degli angoli interni di un pentagono è 3 angoli piatti.

Come possiamo essere arrivati a formulare tale ipotesi, che non è affatto evidente? Una spiegazione plausibile è la seguente.

Osserviamo anzitutto che vale il seguente fatto.

(1) La somma degli angoli interni di un triangolo è eguale a (numero dei lati − 2) angoli piatti, cioè ad 1 angolo piatto.

Ora, un triangolo e un pentagono concordano per il fatto che sono entrambi poligoni convessi. In base a ciò, per analogia per concordanza, da (1) possiamo inferire la seguente conclusione.

(2) La somma degli angoli interni di un pentagono è eguale a (numero dei lati − 2) angoli piatti, cioè a 3 angoli piatti,

ossia (H).

In generale, l'analogia per concordanza è espressa dal seguente schema, dove $Q_1,\ldots,Q_n$ sono le proprietà rispetto a cui si sa che a e b concordano, e P è una proprietà rispetto a cui non si sa ancora se a e b concordano.

> Da $P(a)$ e da $Q_1(a)\wedge\ldots\wedge Q_n(a)\wedge Q_1(b)\wedge\ldots Q_n(b)$ si può inferire $P(b)$.

Nell'esempio precedente $P(a)$ è la proprietà 'la somma degli angoli interni di a è eguale a (numero dei lati − 2) angoli piatti'; $Q_1(a)$ è la proprietà 'a è un poligono convesso'. Per analogia per concordanza, da (1) si ottiene (2), cioè (H).

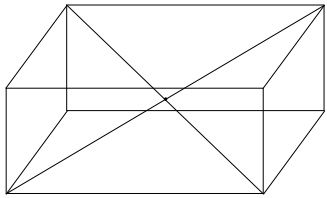
6. L'analogia per concordanza e discordanza

Un altro tipo di analogia è l'analogia per concordanza e discordanza. Essa può essere illustrata, ad esempio, mediante il seguente problema.

> (I) Le diagonali di un parallelepipedo hanno un punto in comune e, in caso affermativo, da che cosa è dato tale punto comune?

Per risolverlo formuliamo la seguente ipotesi.

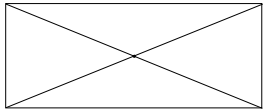
> (J) Le diagonali di un parallelepipedo hanno un punto comune che è dato dal loro punto medio.



Come possiamo essere arrivati a formulare tale ipotesi, che non è affatto evidente? Una spiegazione plausibile è la seguente.

Osserviamo anzitutto che vale il seguente fatto.

> (1) Le diagonali di un parallelogramma hanno un punto in comune che è dato dal loro punto medio.



Se chiamiamo elementi limitanti di un parallelogramma i suoi lati ed elementi limitanti di un parallelepipedo le sue facce, allora un parallelogramma e un parallelepipedo concordano per il fatto che in essi ogni elemento limitante è parallelo ad esattamente un altro elemento limitante ed è perpendicolare ai rimanenti elementi limitanti. Essi, invece, discordano per il fatto che un parallelogramma è una figura bidimensionale mentre un parallelepipedo è una figura tridimensionale. In base a ciò, per analogia per concordanza e discordanza, da (1) possiamo inferire (J).

In generale, l'analogia per concordanza e discordanza è espressa dal seguente schema, dove $Q_1,\ldots,Q_n$ sono le proprietà rispetto a cui si sa che *a* e *b* concordano, $R_1,\ldots,R_k$ sono le proprietà rispetto a cui si sa che *a* e *b* discordano, e *P* è una proprietà rispetto a cui non si sa ancora se *a* e *b* concordano o discordano.

> Da $P(a)$, da $Q_1(a)\wedge\ldots\wedge Q_n(a)\wedge Q_1(b)\wedge\ldots Q_n(b)$ e da $\neg((R_1(a)\wedge\ldots\wedge R_k(a))\wedge(R_1(b)\wedge\ldots\wedge R_k(b)))$ si può inferire $P(b)$.

Nell'esempio precedente $P(a)$ è la proprietà 'le diagonali di *a* hanno un punto in comune che è dato dal loro punto medio'; $Q_1(a)$ è la proprietà 'in *a* ogni elemento limitante è parallelo ad esattamente un altro elemento limitante ed è perpendicolare ai rimanenti elementi limitanti'; $R_1(a)$ è la proprietà '*a* è una figura bidimensionale'; $R_2(a)$ è la proprietà '*a* è una figura tridimensionale'. Per analogia per concordanza e discordanza, da (1) si ottiene (J).

32
Induzione e analogia

1. Un rapporto elusivo

Tra induzione e analogia esiste un rapporto la cui natura, però, è così elusiva che, come abbiamo detto, gli epicurei non distinguono nettamente tra induzione e analogia perché considerano l'induzione come un procedimento per analogia. Persino Mill, che pure si occupa ampiamente dell'induzione e dell'analogia, afferma che «non abbiamo nulla in base a cui discriminare l'analogia dall'induzione» (Mill 1963-86, VII, 555). Di fatto sui rapporti tra induzione e analogia sono state fatte affermazioni contrastanti e spesso confuse.

Per esempio, da un lato, Hume afferma che l'inferenza induttiva sembra analogica in quanto presuppone il riconoscimento di somiglianze tra i casi considerati. Infatti tutte le inferenze induttive «sono fondate sulla somiglianza che noi scopriamo tra gli oggetti naturali, e dalla quale siamo indotti ad aspettarci effetti simili a quelli che abbiamo trovato seguire da tali oggetti» (Hume 1975, 36). Tra i vari casi su cui si basa una generalizzazione induttiva dev'esserci sempre qualche somiglianza, avendo essi in comune almeno il fatto di essere casi particolari della proposizione risultante dalla generalizzazione. Perciò alla base di ogni inferenza induttiva dev'esserci un'analogia.

Dall'altro lato, Kant afferma che l'inferenza analogica sembra induttiva in quanto comporta che, dal fatto che certe cose concordano tra loro rispetto a certe proprietà, si può concludere che esse concorderanno anche rispetto ad altre proprietà. Perciò l'analogia sembra essere «un'induzione, soltanto un'induzione rispetto al predicato» (Kant 1900- , XXIV, 287). Essa «estende le proprietà date di una cosa a più proprietà della medesima cosa» (ivi, IX, 133). In base all'analogia, «se due cose si accordano in tutti gli attributi che ho potuto riconoscere in esse, allora esse si accorderanno anche negli altri» (ivi, XXIV, 287). La differenza tra induzione e analogia si può

riassumere nella formula: «uno in molti, dunque in tutti: induzione; molto in uno (che è anche in altri), dunque anche il rimanente in quello stesso uno: analogia» (ivi, IX, 133).

Come vedremo, però, sia il punto di vista di Hume sia quello di Kant sulle relazioni tra induzione e analogia sono inadeguati.

2. L'induzione come sottospecie dell'analogia

Il punto di vista di Hume, secondo cui ogni inferenza induttiva è analogica in quanto presuppone il riconoscimento di somiglianze tra i casi considerati, è inadeguato perché considera soltanto l'analogia positiva, ossia le proprietà rispetto a cui i casi considerati concordano, trascurando l'analogia negativa, ossia le proprietà rispetto a cui i casi considerati discordano.

Secondo Hume, non può esistere alcun processo «di ragionamento che, da un caso, trae una conclusione così diversa da quella che esso inferisce da cento casi che non sono in alcun modo differenti da quel singolo caso» (Hume 1975, 36). Ciò che conta non è il numero dei casi ma la loro somiglianza. In quanto si basa sulla somiglianza e non sul numero dei casi, ogni inferenza induttiva è dunque analogica.

Ma, come osserva Keynes, è vero che l'inferenza induttiva dipende dal riconoscimento di somiglianze tra casi e che, «se fosse assolutamente vero che i cento casi non sono in alcun modo differenti da quel singolo caso, allora Hume avrebbe ragione di chiedersi in che modo essi possano rafforzare l'argomento» (Keynes 1948, 233). Infatti, «non vi è alcun processo di ragionamento che da un caso trae una conclusione differente da quella che esso inferisce da cento casi se si sa che questi non sono in alcun modo differenti dal primo» (ivi, 219).

Tuttavia l'inferenza induttiva dipende dal riconoscimento di somiglianze tra casi nessuno dei quali è eguale agli altri. In effetti, «l'obiettivo di aumentare il numero dei casi deriva dal fatto che noi siamo quasi sempre a conoscenza di qualche differenza tra i casi» (ivi, 233). Ogni nuovo caso «può diminuire le somiglianze inessenziali tra i casi e, introducendo una nuova differenza, può accrescere l'analogia negativa. Per questa ragione, e soltanto per questa ragione, sono importanti i nuovi casi» (*ibid.*).

Quando «le analogie negative sono note, non c'è alcun bisogno di contare i casi» (ivi, 219). Ma quando «non sappiamo con precisione come i casi differiscono tra loro, allora un mero aumento del numero dei casi aiuta l'argomentazione. Infatti, a meno che non sappiamo per certo che i casi sono perfettamente uniformi, ogni nuovo caso può eventualmente accrescere l'analogia negativa» (*ibid.*).

Questo mostra l'importanza di considerare, accanto all'analogia positiva, anche l'analogia negativa.

3. L'analogia come sottospecie dell'induzione

Anche il punto di vista di Kant, secondo cui ogni inferenza analogica è induttiva in quanto inferisce che, se due cose concordano tra loro rispetto a certe proprietà, dovranno concordare anche rispetto ad altre proprietà, è inadeguato perché considera soltanto l'analogia positiva, trascurando l'analogia negativa.

Ciò si vede facilmente dalla riformulazione del punto di vista di Kant data da Jevons, secondo cui tra l'inferenza induttiva e l'inferenza analogica «non vi è che una distinzione di grado», perché «in entrambi i casi da certe somiglianze osservate noi inferiamo, con maggiore o minore probabilità, l'esistenza di altre somiglianze» (Jevons 1877, 596). Mentre nell'inferenza induttiva «le somiglianze hanno grande estensione e di solito piccola intensione», cioè gli oggetti considerati sono molti e i punti di somiglianza osservati sono pochi, nell'inferenza analogica «noi ci basiamo sulla grande intensione, l'estensione essendo piccola», cioè «le qualità o punti di somiglianza sono numerosi, non gli oggetti» (*ibid.*). Poiché la differenza tra l'inferenza induttiva e l'inferenza analogica è solo una differenza di grado, il ragionamento induttivo «trapassa impercettibilmente nel ragionamento analogico» (ivi, 627).

Secondo Jevons, nell'inferenza induttiva noi inferiamo, dal fatto che abbiamo osservato che due proprietà Q e P sono associate tra loro in un gran numero di casi e non sono mai state trovate separate, che la prossima volta che incontreremo Q sarà presente anche P. Quindi l'inferenza induttiva ha la forma: se certi oggetti $a_1,...,a_n$ aventi in comune la proprietà Q hanno in comune anche la proprietà P, allora ogni nuovo oggetto b, posto che abbia la proprietà Q, avrà anche la proprietà P.

Invece, nell'inferenza analogica noi inferiamo, dal fatto che abbiamo osservato che certi oggetti (di numero limitato) hanno molte proprietà in comune, che ogni nuovo oggetto avente quelle stesse proprietà ne avrà in comune anche altre, cioè «molti punti di somiglianza ne implicano molti altri ancora» (ivi, 596). Quindi l'inferenza analogica ha la forma: se certi oggetti $a_1,...,a_n$ (per n abbastanza piccolo) hanno in comune le proprietà $Q_1,\ldots,Q_k$, allora ogni nuovo oggetto b, posto che abbia in comune con $a_1,...,a_n$ le proprietà $Q_1,\ldots,Q_k$, avrà in comune con esse anche altre proprietà P.

Dalla formulazione dell'inferenza induttiva e dell'inferenza analogica data da Jevons, risulta evidente che ogni inferenza analogica è induttiva perché, solo se tutti gli oggetti già osservati hanno certe proprietà in comune, ci si può aspettare che ogni nuovo oggetto, posto che abbia anch'esso quelle proprietà, avrà in comune con gli oggetti già osservati anche qualche altra proprietà.

Da tale formulazione risulta evidente anche che essa tiene conto soltanto dell'analogia positiva, trascurando l'analogia negativa, perché considera soltanto le proprietà che gli oggetti già osservati hanno in comune, mentre tralascia quelle che non hanno in comune. Di conseguenza con tale formulazione possono risultare non corrette inferenze analogiche che, invece, se formulate tenendo conto dell'analogia negativa, sarebbero corrette.

Per esempio, con un'inferenza analogica del tipo considerato da Jevons, si potrebbe inferire che, se si è osservato che due cigni sono bianchi e uno di essi ha il collo lungo, allora anche l'altro cigno ha il collo lungo. Ma se il secondo cigno è un cigno coscoroba (un tipo di cigno dal collo corto), tale inferenza non è corretta. Se invece si tiene conto dell'analogia negativa, si può inferire correttamente, dal fatto che si è osservato che due cigni sono bianchi e non sono cigni coscoroba e uno di essi ha il collo lungo, che anche l'altro cigno avrà il collo lungo.

Ciò mostra l'inadeguatezza del punto di vista di Jevons sul rapporto tra l'inferenza induttiva e l'inferenza analogica, e quindi anche di quello di Kant.

4. Il rapporto tra induzione e analogia

Alla luce dell'inadeguetezza sia del punto di vista di Hume sia di quello di Kant e Jevons sul rapporto tra l'inferenza induttiva e l'inferenza analogica, come va inteso tale rapporto?

Dalle considerazioni che sono state svolte sopra appare evidente che l'inferenza induttiva e l'inferenza analogica sono strettamente connesse tra loro e travalicano l'una nell'altra se si considera soltanto l'analogia positiva, ma sono irriducibili l'una all'altra se si considera anche l'analogia negativa.

Tuttavia tra l'inferenza induttiva e l'inferenza analogica vi è un rapporto di complementarità: esse sono utili in situazioni differenti.

L'inferenza induttiva è utile quando non sappiamo esattamente come differiscono tra loro i casi osservati, e quindi non ne conosciamo esattamente l'analogia negativa. Allora, un aumento del numero dei casi osservati può aiutarci a trarre qualche conclusione su di essi.

L'inferenza analogica è utile, invece, quando abbiamo osservato un numero relativamente limitato di casi, ma conosciamo con sufficiente precisione tanto l'analogia positiva quanto l'analogia negativa dei relativamente pochi casi osservati. Allora l'analogia positiva e negativa di tali casi può aiutarci a trarre qualche conclusione su di essi.

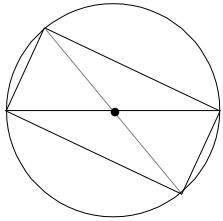
33
L'uso della figura

1. Uso della figura e pensiero matematico

Un'altra inferenza non-deduttiva per trovare le ipotesi è l'uso della figura, che è l'inferenza mediante la quale si passa dai dati ricavati dall'osservazione di una figura ad un'ipotesi.

Come abbiamo visto, l'uso della figura viene respinto dalla concezione fondazionalista, secondo la quale l'intuizione non deve avere il minimo posto nella dimostrazione, e ciò si ottiene astenendosi deliberatamente dall'introdurre qualsiasi figura nella dimostrazione.

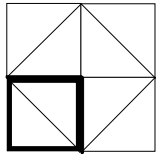
Tuttavia il ruolo dell'uso della figura è stato riconosciuto fin dall'antichità. Per esempio, nella matematica indiana antica, per risolvere il problema di quale tipo di triangolo si può inscrivere in un cerchio prendendo come base del triangolo il diametro del cerchio, si traccia la seguente figura.



Osservandola si vede subito che la figura inscritta nel cerchio è un rettangolo perché le sue diagonali, coincidendo col diametro del cerchio, sono eguali tra loro. Di conseguenza un triangolo che si può inscrivere in un cerchio prendendo come base del triangolo il diametro del cerchio è un triangolo rettangolo.

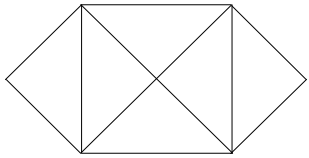
Il ruolo dell'uso della figura è riconosciuto anche nella matematica greca. Per esempio, per risolvere il problema della duplicazione del quadrato,

ossia il problema, ‘Dato un quadrato, costruire un altro quadrato di superficie doppia rispetto a quello dato’, Platone usa la seguente figura.



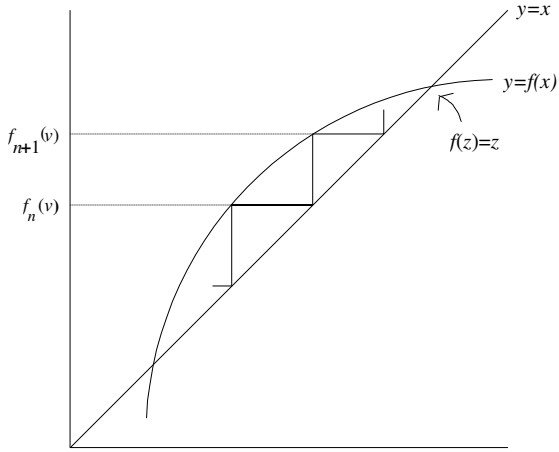
Osservandola si vede subito che, mentre il quadrato dato (in neretto) consta di due triangoli eguali, il quadrato il cui lato è la diagonale del quadrato dato consta di quattro di tali triangoli, e quindi ha superficie doppia rispetto al quadrato dato. Se ne conclude, perciò, che «è dalla diagonale che si ottiene la superficie doppia» (Platone, *Menone*, 85 b 5-6).

Addirittura, Schopenhauer critica Euclide perché nei suoi *Elementi* non assegna un ruolo centrale all’uso della figura. Per esempio, secondo Schopenhauer, «la dimostrazione zoppicante, anzi insidiosa» del teorema di Pitagora data da Euclide non ci fa vedere perché il triangolo rettangolo ha necessariamente tale proprietà, mentre «la seguente ben nota e semplice figura ci fa vedere la cosa con un solo sguardo molto di più di quella dimostrazione, e ci dà l’intima, ferma persuasione di quella necessità e della dipendenza di quella proprietà dell’angolo retto» (Schopenhauer 1960, I, 123).



Inoltre, un’altra ben nota e semplice figura ci dà tale persuasione «anche quando i cateti sono diversi tra loro» (*ibid.*).

Il ruolo dell’uso della figura non si limita alla geometria. Per esempio, consideriamo il seguente problema. Data una funzione $f(x)$ continua e crescente nell’intervallo $0 \le x \le 1$ e tale che $0 \le f(x) \le 1$, se $f_n(x)$ è la funzione definita da $f_2(x) = f\{f(x)\}$ e $f_n(x) = f\{f_{n-1}(x)\}$, quale proprietà hanno i punti di $f_n(x)$ rispetto alle iterazioni di *f*? Per risolvere tale problema Littlewood usa la seguente figura, che egli ritiene essere «l’unica dimostrazione necessaria per il professionista» (Littlewood 1953, 36).



La figura mostra che ogni punto della funzione è un punto fisso o converge ad un punto fisso, dove per punto fisso si intende un punto z tale che $f(z) = z$, cioè tale che la curva $y = f(x)$ incontra la diagonale $y = x$. Infatti, la linea spezzata che conduce prima orizzontalmente dalla curva alla diagonale e poi verticalmente dalla diagonale alla curva, porta da $y = f_n(v)$ a $y = f_{n+1}(v)$. Per vedere che ogni punto di $f(x)$ è un punto fisso o converge ad un punto fisso, occorre vedere che il limite delle $f_n(v)$ al crescere di n è un punto z tale che $f(z) = z$. Ma, osservando la figura, si vede subito che è così perché, se così non fosse ma fosse sempre $f(v) > v$, sarebbe $f(1) > 1$ contraddicendo l'ipotesi $f(v) \leq 1$, mentre, se fosse sempre $f(v) < v$, sarebbe $f(0) < 0$ contraddicendo l'ipotesi $0 \leq f(v)$.

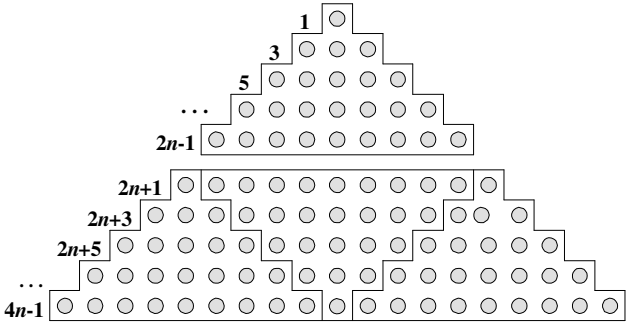
2. Uso della figura e induzione

L'uso della figura svolge un ruolo non solo in sé ma anche come sussidiario dell'induzione e dell'analogia.

Che l'uso della figura svolga un ruolo come sussidiario dell'induzione può essere visto, ad esempio, mediante il seguente problema proposto originariamente da Galilei.

(A) Qual è il valore di $\dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+\ldots+(4n-1)}$?

Per risolvere tale problema basta osservare la seguente figura.



Questa figura suggerisce subito la seguente ipotesi per la soluzione del problema (A).

$$\frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+\ldots+(4n-1)}=\frac{1}{3}.$$

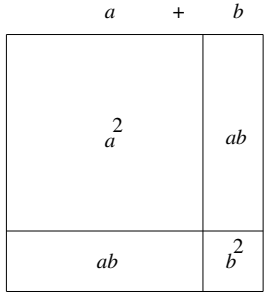
Tale ipotesi è stata ottenuta per induzione da un singolo caso, cioè da quello rappresentato dalla figura.

3. Uso della figura e analogia

Parimenti, che l'uso della figura svolga un ruolo come sussidiario dell'analogia può essere mostrato, ad esempio, mediante il seguente problema.

(B) Qual è lo sviluppo della potenza del binomio $(a+b)^2$?

Per risolvere tale problema, notiamo anzitutto che i numeri concordano per certi versi con le figure geometriche, perché hanno in comune con esse certe proprietà. Per esempio i numeri quadrati concordano per certi versi col quadrato geometrico. Osserviamo allora la seguente figura.



Tale figura suggerisce subito la seguente ipotesi per la soluzione del problema (B).

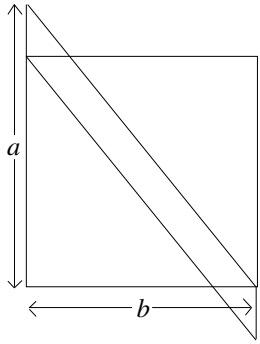
$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab.$$

Questa ipotesi è stata ottenuta per analogia per concordanza basandosi sulla figura.

4. Uso della figura e visione

L'uso della figura è legato alla visione. Ammettere tale uso nella matematica come mezzo per trovare le ipotesi significa riconoscere che il pensiero matematico non si limita al pensiero verbale ma include anche il pensiero visivo. Un tale riconoscimento è implicito, ad esempio, nelle risposte date ad un questionario di Hadamard da numerosi matematici, i quali dichiarano che, nel loro lavoro di ricerca, «evitano non solo l'uso di parole mentali» ma anche «l'uso mentale di segni algebrici o di qualsiasi altro segno preciso», e, invece di parole e segni, «usano immagini vaghe» (Hadamard 1945, 84). Tali immagini «sono il più frequentemente visive» (ivi, 85).

Nell'uso della figura la visione svolge un ruolo che non è passivo ma attivo perché, per trovare l'ipotesi per la soluzione di un problema mediante l'uso della figura, occorre saper individuare in quest'ultima i dati rilevanti. Ciò dipende dal fatto che spesso una figura ammette più letture alternative. Per esempio, osserviamo la figura alla pagina seguente.



Essa può essere vista come la sovrapposizione di un quadrato e di un parallelogramma. Ma supponiamo di voler risolvere il problema: trovare la superficie del quadrato più il parallelogramma quando sono date a e b. A tale scopo può essere più utile vedere la figura come la sovrapposizione di due triangoli. Siccome ciascuno di tali triangoli ha superficie $ab/2$, la superficie del quadrato più il parallelogramma è ab. Dunque gli stessi segnali forniti all'organismo dai recettori retinici si prestano a due interpretazioni differenti, una delle quali è più adatta dell'altra alla soluzione del problema.

Questo conferma che, per vedere la soluzione di un problema mediante l'uso della figura, occorre saper individuare in quest'ultima i dati rilevanti. Individuarli porta ad una riorganizzazione dei dati, in virtù della quale oggetti che prima rimanevano sullo sfondo vengono percepiti in primo piano.

5. Uso della figura e intuizione

Che l'uso della figura sia legato alla visione non significa che esso si basi sull'intuizione. Infatti, mentre l'intuizione, come dice Kant, è una conoscenza che si riferisce all'oggetto immediatamente e quindi senza alcuna inferenza, l'uso della figura è un'inferenza.

Lo è perché la visione richiede di fare un'ipotesi su ciò che sta fuori di noi, e l'ipotesi è il risultato di un'inferenza. Infatti, la visione non si riduce ai segnali forniti all'organismo dai recettori retinici. L'immagine retinica è solo il primo stadio della visione. Quello che vediamo differisce in modo rilevante da essa. Nella visione noi passiamo dai dati a qualcosa che non è completamente contenuto in essi, e questo richiede un'inferenza, si intende, un'inferenza nel senso generalizzato di un'operazione mediante la quale si passa da certi dati ad un altro dato. Tale inferenza è un'inferenza non-deduttiva, perché passa dai dati a qualcosa che non è completamente contenuto in essi, e quindi è ampliativa. Inoltre, è un'inferenza inconsapevole,

perché nella visione i processi inferenziali occorrono troppo velocemente e ad un livello troppo basso nella mente per essere accessibili all'introspezione consapevole.

Questo carattere della visione, e in generale della percezione sensibile, è sottolineato già da von Helmholtz, secondo cui sono certe «inferenze induttive che portano alla formazione delle nostre percezioni sensibili», ed esse possono essere dette propriamente «inferenze: inferenze induttive effettuate in modo inconsapevole» (von Helmholtz 1896, 582). Ciò comporta un ampliamento del campo della logica, includendovi non solo operazioni mediante cui si passa da certi dati ad un altro dato, ma anche operazioni inconsapevoli. Questo è sottolineato già dai contemporanei di von Helmholtz, come Dilthey secondo cui, con la sua «logica dell'inferenza inconsapevole» in base alla quale «i processi fisici in cui ha luogo la percezione sono equivalenti quanto agli effetti alle operazioni del pensiero discorsivo», von Helmholtz «ha ampliato il campo della logica» (Dilthey 1923- , XIX, 393).

6. Uso della figura ed errore

Che l'uso della figura non si basi sull'intuizione non dipende soltanto dal fatto che è un'inferenza, ma anche dal fatto che, mentre l'intuizione è stata intesa tradizionalmente come infallibile, l'uso della figura, come ogni altra inferenza non-deduttiva, è fallibile.

Ma che l'uso della figura sia fallibile non significa che debba essere respinto. Come mostrano i paradossi della teoria degli insiemi e i tanti errori che si trovano nelle dimostrazioni matematiche, anche l'uso del discorso è fallibile, ma questo non significa che debba essere respinto.

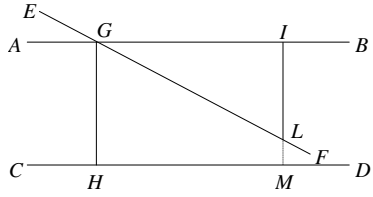
A causa della fallibilità dell'uso della figura «si usava dare il pesante avvertimento che le figure non sono rigorose; questo pesante avvertimento non ha mai visto contestare il suo bluff, e ha permanentemente costretto le sue vittime, per paura, a giocare sul sicuro. Senza dubbio alcune figure non sono rigorose», ma «molte lo sono» (Littlewood 1953, 35).

Inoltre, spesso gli errori nell'uso della figura possono essere evitati per mezzo di un'analisi dei dati. Ciò può essere visto, ad esempio, considerando l'argomento mediante il quale Proclo pretende di dimostrare il V postulato di Euclide.

(C) Se una retta, incontrandone altre due, forma angoli interni da una stessa parte minori di due angoli retti, le due rette, se prolungate indefinitamente, si incontrano da quella parte in cui si trovano i due angoli minori di due angoli retti.

L'argomento di Proclo si basa su un uso inadeguato della figura. Esso procede nel modo seguente.

Supponiamo che AB, CD siano due rette parallele, e EF sia una retta che incontra AB nel punto G formando un angolo FGB. Vogliamo mostrare che EF incontra anche CD.



Sia H il punto di incontro della perpendicolare da G a CD. Se EF coincide con GH, allora EF incontra CD nel punto H e non c'è da dimostrare nulla. Altrimenti, un segmento GL di EF giacerà tra GH e un segmento GI di AB, dove I è il punto di incontro della perpendicolare da L ad AB. Ora, «se da un singolo punto si prolungano indefinitamente due rette formanti un angolo, la distanza tra esse quando vengono prolungate indefinitamente diverrà maggiore di qualsiasi grandezza finita» (Proclo 1992, 371.14-17). Perciò, allontanando indefinitamente il punto L dal punto G sulla retta EF, il segmento IL crescerà indefinitamente e alla fine diverrà maggiore del segmento GH. Dunque L passerà dall'altra parte di CD, e quindi EF incontrerà CD.

Sebbene questo argomento sembri dimostrare il V postulato di Euclide, in realtà non lo dimostra. Infatti, come si giustifica il suo ultimo passo, cioè che L alla fine passerà dall'altra parte di CD, e quindi EF incontrerà CD? Per giustificarlo, dobbiamo ricorrere alla seguente ipotesi.

(D) Date due rette parallele AB, CD aventi in comune una perpendicolare GH, e dato un punto L che non giace su AB né su CD, se I (rispettivamente M) è il punto di incontro della perpendicolare da L ad AB (rispettivamente, a CD), allora I, L e M sono sulla stessa retta e $IM = GH$.

Da (D) segue che, se IL diventa maggiore di GH, allora IL diventa maggiore anche di IM, e perciò L deve stare dall'altra parte di CD.

Questa conclusione presuppone, però, l'ipotesi (D). Ora, la figura ci dà l'impressione che (D) valga, ma un esame più approfondito mostra che, mentre (D) vale nella geometria euclidea, non vale nella geometria ellittica. Questo significa che (D) può essere dimostrata solo per mezzo del V

postulato di Euclide. Dunque l'argomento di Proclo comporta un circolo. L'analisi dei dati fa vedere, quindi, che la dimostrazione di Proclo del V postulato di Euclide fa un uso inadeguato della figura per stabilire (D).

34
La generalizzazione e la particolarizzazione

1. La generalizzazione

Un'altra inferenza non-deduttiva per trovare le ipotesi è la generalizzazione. Anzi questa, secondo Reichenbach, è così importante che si può dire che «l'arte della scoperta è l'arte della corretta generalizzazione» (Reichenbach 1951, 5).

La generalizzazione è l'inferenza mediante la quale si passa da un'ipotesi ad un'altra che la contiene come caso particolare. La sua importanza deriva dal fatto che spesso, per trovare un'ipotesi, risulta più facile trovarne prima un caso particolare. Per vederlo consideriamo, ad esempio, la seguente ipotesi.

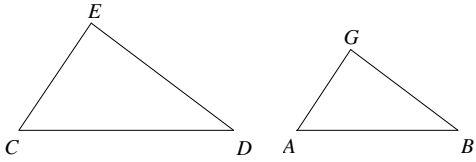
(A) Su una retta data si può costruire un poligono simile ad un poligono dato.

Consideriamo ora la seguente nuova ipotesi.

(B) Su una retta data si può costruire un triangolo simile ad un triangolo dato.

Chiaramente (A) è una generalizzazione di (B) perché un triangolo è un poligono con tre lati.

È facile arrivare a (B). Infatti, supponiamo che AB sia la retta data e che ECD sia il triangolo dato.



Sulla retta AB costruiamo l'angolo GAB eguale all'angolo ECD, e l'angolo ABG eguale all'angolo CDE. Allora l'angolo rimanente AGB sarà eguale all'angolo CED. Dunque i triangoli GAB e ECD hanno tutti gli angoli eguali. Ma allora essi hanno i lati in proporzione. Poiché tali triangoli hanno i lati in proporzione e gli angoli eguali, essi sono simili. Così si arriva a (B).

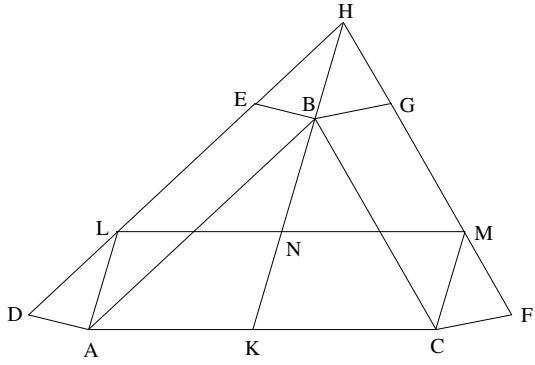
Da (B) per generalizzazione si ottiene (A) perché, come si è detto, un triangolo è un poligono con tre lati.

La generalizzazione è importante non soltanto perché spesso, per trovare un'ipotesi, risulta più facile trovarne prima un caso particolare, ma anche perché un'ipotesi può suggerirne altre più generali. Per esempio, consideriamo la seguente ipotesi (teorema di Pitagora).

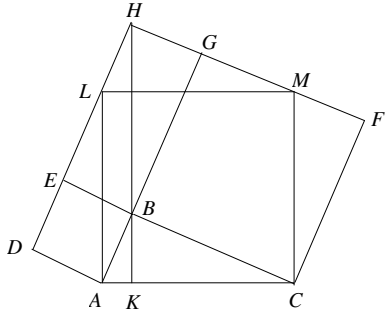
(C) Per ogni triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è eguale alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati.

Consideriamo ora la seguente nuova ipotesi, che è stata formulata da Pappo.

(D) Per ogni triangolo ABC e per ogni parallelogramma $ABED$, $BCFG$, se si prolungano DE, FG fino ad H e si traccia HB, il parallelogramma contenuto da AC, HB (con un angolo LAC che è eguale alla somma degli angoli BAC, DHB), è eguale alla somma dei parallelogrammi $ABED$, $BCFG$.



Chiaramente (D) è una generalizzazione di (C) perché (C) è il caso particolare di (D) in cui ABC è un triangolo rettangolo, il parallelogramma contenuto da AC, HB è il quadrato costruito sull'ipotenusa AC, e i parallelogrammi $ABED$, $BCFG$ sono i quadrati costruiti sugli altri due lati AB, BC.



L'ipotesi (D) si ottiene da (C) riflettendo su quale proprietà corrispondente a (C) potrebbe essere estesa per generalizzazione a triangoli qualsiasi. Presumibilmente questo è il modo in cui (D) è stata trovata da Pappo, come suggerisce la sua affermazione che l'enunciato di (D) «è molto più generale di quello sui quadrati nel caso dei triangoli rettangoli dimostrato negli *Elementi*» (Pappo 1965, IV, 178.11-13).

2. La particolarizzazione

L'inverso della generalizzazione è la particolarizzazione, che è l'inferenza mediante la quale si passa da un'ipotesi ad un'altra che è contenuta in essa come caso particolare. La sua importanza deriva dal fatto che spesso, per trovare un'ipotesi, risulta più facile trovarne prima un'altra più generale. Per vederlo consideriamo, ad esempio, la seguente ipotesi.

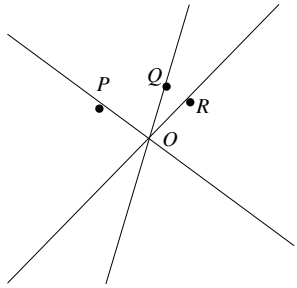
(E) Date tre rette non nello stesso piano passanti per lo stesso punto O, si può trovare un piano passante per O inclinato nello stesso modo rispetto alle tre rette.

Consideriamo ora la seguente nuova ipotesi.

(F) Date tre rette non nello stesso piano passanti per lo stesso punto O, e dato un punto P su una delle tre rette, si può trovare un piano passante per P inclinato nello stesso modo rispetto alle tre rette.

Chiaramente (E) è una particolarizzazione di (F) perché è il caso particolare di (F) in cui $P = O$.

È facile arrivare a (F). Infatti, se $P \neq O$, basta scegliere due punti Q e R sulle altre due rette, tali che $OP = OQ = OR$.



Il piano passante per P, Q e R è inclinato nello stesso modo rispetto alle tre rette. Così si arriva ad (F).

Da (F) per particolarizzazione si ottiene (E) perché, come si è detto, (E) è il caso particolare di (F) in cui $P = O$.

3. L'unione di generalizzazione e particolarizzazione

Generalizzazione e particolarizzazione possono anche essere usate congiuntamente per trovare le ipotesi, ascendendo per generalizzazione da un'ipotesi particolare ad un'altra più generale, e poi discendendo per

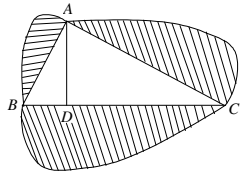
particolarizzazione da essa ad una nuova ipotesi più particolare che può essere stabilita facilmente. A questo punto si risale per generalizzazione da tale ipotesi più particolare a quella più generale, e poi si ridiscende per particolarizzazione da essa all'ipotesi particolare originaria.

Per vedere un'applicazione di questo procedimento consideriamo la seguente ipotesi, che è una riscrittura dell'ipotesi (C) precedente (teorema di Pitagora).

(G) Se si descrivono tre quadrati sui lati di un triangolo rettangolo, il quadrato descritto sull'ipotenusa è eguale alla somma dei quadrati descritti sugli altri due lati.

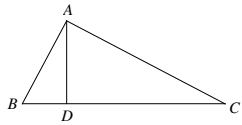
Consideriamo ora la seguente nuova ipotesi.

(H) Se si descrivono tre figure piane simili sui lati di un triangolo rettangolo, la figura piana descritta sull'ipotenusa è eguale alla somma delle figure piane descritte sugli altri due lati.



Chiaramente (H) è una generalizzazione di (G), perché un quadrato è una figura piana. Consideriamo ora la seguente ulteriore ipotesi.

(I) Se si divide un triangolo rettangolo in due tracciando la perpendicolare all'ipotenusa dal vertice comune agli altri due lati, allora il triangolo rettangolo è eguale alla somma dei due triangoli rettangoli risultanti dalla sua divisione.



È facile vedere che (I) è una particolarizzazione di (H). Infatti, dividendo un triangolo rettangolo in due nel modo indicato, otteniamo tre triangoli rettangoli, quello descritto sull'ipotenusa, ABC, e quelli descritti sugli altri

due lati, ADB e ADC. Tali triangoli sono simili perché hanno gli angoli eguali (infatti hanno un angolo retto e un angolo in comune). Ciascuno di questi tre triangoli rettangoli può essere pensato come una figura piana descritta sulla propria ipotenusa ma giacente all'interno del triangolo principale.

È facile arrivare a (I). Basta osservare che il triangolo ABC è la somma dei triangoli ADB, ADC. Da (I) per generalizzazione si arriva a (H), dalla quale per particolarizzazione si arriva ad (G). Dunque all'ipotesi (G) si è arrivati ascendendo per generalizzazione da (G) a (H), discendendo per particolarizzazione da (H) a (I), e poi risalendo per generalizzazione da (I) a (H), e poi ridiscendendo per particolarizzazione da (H) a (G).

35
La metafora e la metonimia

1. La metafora

Un'altra inferenza non-deduttiva per trovare le ipotesi è la metafora. Essa svolge un importante ruolo nel pensiero, ivi compreso il pensiero matematico, anche se sembra esagerato dire che è «il mezzo fondamentale che rende possibile il pensiero astratto», e che «i concetti astratti tipicamente sono compresi, attraverso la metafora, in termini di concetti più concreti» (Lakoff-Núñez 2000, 39).

La metafora è l'asserzione che oggetti di un dato dominio, detto dominio primario, sono oggetti di un altro dominio, detto dominio secondario. Dal fatto che gli oggetti del dominio secondario hanno una certa proprietà, per metafora concludiamo che anche gli oggetti del dominio primario hanno quella proprietà. La metafora, dunque, permette di trasferire proprietà degli oggetti del dominio secondario agli oggetti del dominio primario.

La metafora può avere varie forme. In seguito ne considereremo due, che svolgono un ruolo particolarmente importante nella scoperta delle ipotesi matematiche.

2. Le metafore extra-matematiche

Un primo tipo di metafore è dato dalle metafore extra-matematiche. In esse il dominio primario è costituito dagli oggetti di un dato campo della matematica, e il dominio secondario è costituito da oggetti che ci sono familiari dalla nostra esperienza ordinaria. Le metafore extra-matematiche, quindi, permettono di trasferire proprietà di oggetti che ci sono familiari dalla nostra esperienza ordinaria ad oggetti di un dato campo della matematica.

Illustriamo le metafore extra-matematiche, e il loro uso per trovare le ipotesi, mediante due esempi.

1) Consideriamo il seguente problema, relativo all'eguaglianza tra insiemi.

(A) Quale relazione c'è tra due insiemi aventi gli stessi elementi?

Per risolvere tale problema formuliamo la seguente ipotesi.

(B) Due insiemi aventi gli stessi elementi sono eguali tra loro.

Come possiamo essere arrivati a formulare tale ipotesi? Una spiegazione plausibile può essere data nel modo che segue.

Consideriamo la seguente metafora, in cui il dominio primario è costituito dagli insiemi e il dominio secondario è costituito dalle pluralità di oggetti che vengono apprese come un singolo oggetto.

(1) «Un insieme è una collezione ben definita, una pluralità di oggetti di qualsiasi tipo, che viene appresa come un singolo oggetto. Per esempio, si pensi ad una quantità di pecore che pascolano in un campo. Esse sono una collezione di pecore, una pluralità di oggetti individuali. Tuttavia, possiamo pensare (e spesso pensiamo) ad esse come ad un singolo oggetto: un gregge di pecore» (Machover 1996, 10).

Come mostra l'esempio del gregge, pluralità di oggetti che vengono apprese come un singolo oggetto ci sono familiari dalla nostra esperienza ordinaria. Ora, questa ci dice che due greggi di pecore composti dalle stesse pecore sono eguali tra loro. Ma allora, per metafora (1), da ciò otteniamo (B).

2) Consideriamo il seguente problema, relativo ai punti impropri, cioè ai punti in cui si intersecano tutte le rette appartenenti ad un fascio di rette parallele.

(C) Dato un punto improprio, per ogni punto proprio (cioè, per ogni punto nel senso ordinario), esiste una retta passante per il punto proprio e per il punto improprio?

Per risolvere tale problema formuliamo la seguente ipotesi.

(D) Il problema (C) ammette una risposta affermativa.

Come possiamo essere arrivati a formulare tale ipotesi? Una spiegazione plausibile può essere data nel modo che segue.

Consideriamo la seguente metafora, in cui il dominio primario è costituito dai punti impropri e il dominio secondario è costituito dai punti all'orizzonte verso cui convergono fasci di rette parallele.

(2) Un punto improprio è il punto all'orizzonte verso cui converge un fascio di rette parallele. Per esempio, si pensi al punto all'orizzonte verso cui converge un fascio di binari ferroviari rettilinei che proseguono indefinitamente.

Come mostra l'esempio del fascio di binari ferroviari rettilinei che proseguono indefinitamente, punti all'orizzonte verso cui convergono fasci di rette parallele ci sono noti dalla nostra esperienza ordinaria. Ora, questa ci dice che, dato il punto all'orizzonte verso cui converge un fascio di binari ferroviari rettilinei che proseguono indefinitamente, e dato un punto vicino a noi su cui passa uno di tali binari, quest'ultimo passerà anche per il punto all'orizzonte. Ma allora, per metafora (2), da ciò otteniamo (D).

3. Le metafore intra-matematiche

Un altro tipo di metafore è dato dalle metafore intra-matematiche. In esse il dominio primario è costituito dagli oggetti di un dato campo della matematica e il dominio secondario è costituito dagli oggetti di un altro campo della matematica. Esse, quindi, permettono di trasferire proprietà di oggetti di un dato campo della matematica ad oggetti di un altro campo della matematica.

Illustriamo le metafore intra-matematiche, e il loro uso per trovare le ipotesi, mediante due esempi.

1) Consideriamo il seguente problema, relativo alla potenza di un binomio.

(E) Quale relazione c'è tra $(a+b)^2$ e $(a-b)^2$?

Per risolverlo formuliamo la seguente ipotesi.

$$\text{(F)} \quad (a+b)^2=(a-b)^2+4ab.$$

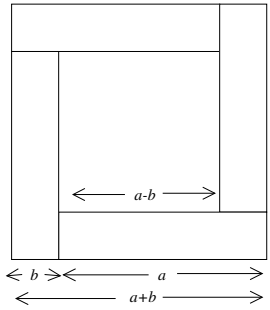
Come possiamo essere arrivati a formulare tale ipotesi? Una spiegazione plausibile può essere data nel modo che segue.

Consideriamo la seguente asserzione metaforica, in cui il dominio primario è costituito dai numeri e il dominio secondario è costituito dalle figure geometriche

(3) Un numero è una figura geometrica.

Osservando la seguente figura geometrica si vede immediatamente che vale questo fatto.

(4) Il quadrato di lato $a+b$ è la somma del quadrato di lato $a-b$ e di quattro rettangoli di lati a e b.



Ma allora, per metafora (3), da (4) otteniamo (F).

2) Consideriamo il seguente problema, che è suggerito da un teorema di Fermat.

(G) Si può generalizzare il teorema di Fermat secondo cui, se p è un numero primo e a non è divisibile per p allora $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, da un numero primo p ad un numero qualsiasi n?

Per risolverlo formuliamo la seguente ipotesi.

(H) Se n è un intero positivo e a è relativamente primo con n, allora $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, dove $\phi(n)$ è il numero degli interi positivi minori di n e relativamente primi con n.

Come possiamo essere arrivati a formulare tale ipotesi? Una spiegazione plausibile può essere data nel modo che segue.

Consideriamo la seguente asserzione metaforica, in cui il dominio primario è costituito dagli interi positivi minori di n e relativamente primi con n e il dominio secondario è costituito dai gruppi rispetto alla moltiplicazione $\bmod n$.

(5) Gli interi positivi minori di n e relativamente primi con n sono un gruppo G rispetto alla moltiplicazione $\bmod n$. Inoltre $o(G) = \phi(n)$, dove $o(G)$ è l'ordine (ossia il numero degli elementi) di G.

Dal teorema di Lagrange sui gruppi finiti si ottiene immediatamente il seguente corollario.

(6) Se G è un gruppo finito e $a \in G$, allora $a^{o(G)} = e$, dove e è l'elemento neutro di G.

Se gli interi positivi minori di n e relativamente primi con n formano un gruppo G rispetto alla moltiplicazione $\bmod n$ e $o(G) = \phi(n)$, allora per (6), sostituendo a col resto della divisione di a per n, abbiamo che $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, cioè (H). Perciò, per metafora (5), da (6) otteniamo (H).

4. La metonimia

Oltre alla metafora, un'altra inferenza non-deduttiva per trovare le ipotesi è la metonimia.

La metonimia è l'asserzione che fa stare una cosa per un'altra cosa. In base a tale asserzione, dal fatto che la seconda cosa ha una certa proprietà, per metonimia possiamo concludere che anche la prima cosa ha quella proprietà. La metonimia, dunque, permette di trasferire proprietà della seconda cosa alla prima cosa.

La metonimia sta alla base di ogni simbolismo matematico. Infatti, ogni asserzione che fa stare un simbolo per un oggetto matematico, per esempio, 'sia ABC un triangolo...', oppure 'sia x un numero...', fa uso della metonimia.

Ma la metonimia serve anche per trovare le ipotesi. Illustriamo ciò mediante il seguente problema.

(I) Se due funzioni f e g per argomenti distinti hanno valori distinti, allora la loro composizione, ossia la funzione $f \circ g$ tale che $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, per argomenti distinti ha valori distinti?

Per risolverlo formuliamo la seguente ipotesi.

(J) La risposta al problema (I) è affermativa.

Come possiamo essere arrivati a formulare tale ipotesi? Una spiegazione plausibile può essere data nel modo che segue.

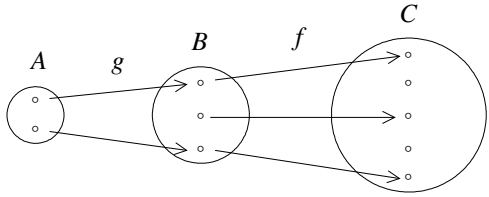
Consideriamo la seguente metonimia, che fa stare una funzione per l'azione del mandare ogni oggetto del dominio in un oggetto del codominio.

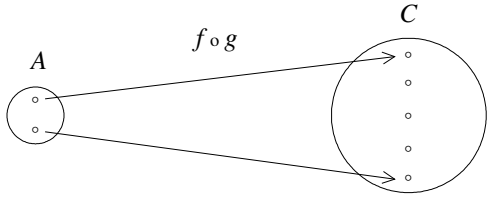
(7) Una funzione manda ogni oggetto del dominio in un oggetto del codominio.

Un esempio di (7) si ha quando si dice che la funzione $2x$ manda i numeri interi nei numeri pari.

Guardando la seguente figura si vede immediatamente che vale questo fatto.

(8) Se due funzioni f e g mandano oggetti distinti del dominio in oggetti distinti del codominio, allora la loro composizione, ossia la funzione $f \circ g$ in base a cui prima manda g e poi manda f, manda oggetti distinti del dominio in oggetti distinti del codominio.





Perciò, per metonimia (7), da (8) otteniamo (J).

Questo esempio mostra che anche la metonimia può svolgere un ruolo nel trovare le ipotesi, quantunque più limitato di quello della metafora.

36
La definizione

1. La definizione come abbreviazione

Per quanto sorprendente possa sembrare, un'altra inferenza non-deduttiva per trovare le ipotesi è la definizione.

La definizione è l'inferenza mediante la quale, per risolvere un problema, si introduce come ipotesi un oggetto in termini di una sua proprietà fondamentale.

Questo modo di concepire la definizione si contrappone a quello della concezione fondazionalista, che invece le attribuisce i seguenti caratteri.

1) La definizione è una mera abbreviazione. Mediante essa «noi introduciamo un nuovo simbolo o combinazione di simboli, detto il definiendum, con la stipulazione che esso debba stare per un'altra combinazione di simboli, detta il definiens, il cui significato è già noto in base ai dati e alle definizioni precedenti» (Curry 1977, 106).

2) La definizione non è né vera né falsa. Essa è «una proposta o decisione di usare il definiendum per intendere ciò che si intende col definiens, oppure una richiesta o un'ingiunzione» (Copi 1978, 137). Le «proposte possono essere respinte, le decisioni violate, le richieste rifiutate, le ingiunzioni disobbedite» ma «nessuna di esse è perciò vera o falsa. Lo stesso vale per le definizioni» (ivi, 137-138).

3) La definizione è eliminabile. Mediante «rimpiazzamenti successivi dei definienda con i loro rispettivi definientia possiamo ridurre ogni espressione ben formata contenente simboli primitivi e simboli definiti ad un'espressione intesa soltanto in termini dei simboli primitivi», e tale espressione «si suppone esista sempre e sia unica» (Curry 1977, 106). Perciò le definizioni «sono eliminabili dal punto di vista teorico», anche se sono «nececessarie in pratica per ridurre le nostre discussioni a dimensioni trattabili» (*ibid.*).

4) La definizione non estende la nostra conoscenza. Essa non permette «la derivazione di qualche teorema non dimostrabile prima, formulato interamente in termini di simboli primitivi e di simboli già definiti» (Suppes 1957, 154). Non porta a «rafforzare la teoria in alcun modo essenziale. Lo scopo dell'introduzione di un nuovo simbolo è quello di facilitare l'indagine deduttiva della struttura di una teoria, e non quello di aggiungere qualcosa a quella struttura» (ivi, 153).

2. Limiti della definizione come abbreviazione

La concezione fondazionalista della definizione va però incontro ad alcune serie difficoltà.

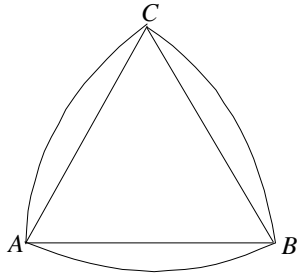
1) Non spiega perché le definizioni svolgono un ruolo essenziale nella matematica. Per la concezione fondazionalista la matematica è deduzione di teoremi da assiomi dati. Ma, se si disponesse solo degli assiomi, da essi si dedurrebbe ben poco. Un passo essenziale è costituito dall'introduzione di nuovi concetti mediante definizioni. La ricerca di nuovi concetti e definizioni è uno dei caratteri essenziali della matematica. Alquanto incongruamente, questo viene riconosciuto anche da alcuni sostenitori della concezione fondazionalista, i quali ammettono che, «nonostante il fatto che le definizioni siano teoricamente superflue, nondimeno è vero che esse spesso comunicano un'informazione più importante di quella contenuta nelle proposizioni in cui sono usate» (Whitehead-Russell 1925-27, I, 11). Infatti, «quando (come spesso accade) ciò che si definisce è qualcosa che è già familiare», allora «la definizione contiene un'analisi di un'idea comune, e può perciò esprimere un notevole progresso» perché «dà definitezza ad un'idea che prima era più o meno vaga» (ivi, 12). Per questo motivo «le definizioni sono ciò che vi è di più importante e di più meritevole di attenzione prolungata» (*ibid.*).

2) Non spiega perché spesso i matematici spendono tanto tempo a ricercare definizioni adeguate per giustificare teoremi già noti. Tale è il caso del teorema di Euler sul rapporto tra il numero delle facce, dei vertici e degli spigoli di un poliedro, che era noto molto tempo prima che si riuscisse a trovare una definizione adeguata di poliedro. Per trovarla è occorso più di un secolo di ricerche. Questo sarebbe incomprensibile se le definizioni fossero mere abbreviazioni.

3) Non spiega perché spesso i matematici danno presentazioni assiomatiche alternative di una teoria matematica nelle quali le definizioni di una di esse compaiono come teoremi dell'altra. Ciò implica che tra le definizioni e i teoremi non vi sono differenze di principio.

4) Non spiega perché le definizioni possono sbagliare. Per esempio, la definizione del cerchio come figura piana tutti i cui diametri sono eguali è inadeguata perché è soddisfatta non soltanto dal cerchio ma anche dalla figura che si ottiene da un poligono regolare con un numero di lati dispari, per

esempio da un triangolo equilatero ABC, rimpiazzando i suoi lati con archi di cerchio centrati sul vertice opposto.



È vero che il perimetro di tale figura è eguale alla circonferenza del cerchio di diametro AB, poiché consiste di tre archi di raggio $r = AB$, ciascuno dei quali, essendo ABC equilatero, è $1/6$ della circonferenza del cerchio di diametro $2r$, quindi è $(2\pi r)/6 = (\pi r)/3$, il che implica che la lunghezza del perimetro di ABC è πr. Nondimeno, la figura non è un cerchio.

5) Non spiega perché molte definizioni usate comunemente in matematica non sono eliminabili. Per esempio, se introduciamo la divisione mediante la definizione,

$$\text{(A)} \quad y \neq 0 \rightarrow (\frac{x}{y} = z \leftrightarrow x = y \cdot z),$$

allora il simbolo della divisione è eliminabile se $y \neq 0$, mentre non lo è se $y = 0$, per esempio non è eliminabile in $\frac{1}{0} = \frac{1}{0}$. È vero che si può assicurare l'eliminabilità del simbolo della divisione adottando, invece di (A), la definizione,

$$\text{(B)} \quad \frac{x}{y} = z \leftrightarrow (y \neq 0 \wedge x = y \cdot z) \vee (y = 0 \wedge z = 0).$$

Ma per (B) si ha $\frac{x}{0} = 0$ per ogni *x*, e questo porta alla violazione di alcune semplici leggi algebriche, come $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}$. Infatti $\frac{1}{0} + \frac{1}{1} = 0 + 1 = 1 \neq 0 = \frac{1}{0} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{0 \cdot 1}$.

6) Non spiega perché molte definizioni usate comunemente in matematica estendono la nostra conoscenza. Poiché tra le definizioni e i

teoremi non vi sono differenze di principio, se i teoremi estendono la nostra conoscenza, anche le definizioni la estendono.

3. La definizione come mezzo di scoperta

In realtà, come abbiamo detto, la definizione non è una mera abbreviazione, ma è un'inferenza mediante la quale si introduce, come ipotesi per risolvere un problema, un oggetto in termini di una sua proprietà fondamentale.

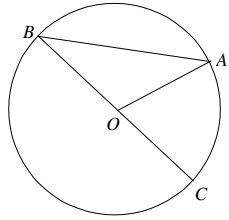
La definizione permette di trovare altre proprietà dell'oggetto, in particolare proprietà recondite. Per vederlo consideriamo, ad esempio, la seguente definizione del cerchio.

(C) Il cerchio è una figura piana tutti i cui raggi sono eguali.

Essa permette di trovare altre proprietà del cerchio, in particolare proprietà recondite, come la seguente.

(D) «In un cerchio l'angolo al centro è il doppio dell'angolo alla circonferenza, quando gli angoli hanno la stessa circonferenza come base» (Euclide, *Elementa*, III, Prop. 20).

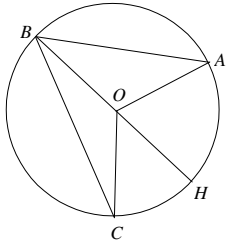
Per arrivare a (D) basta considerare il caso speciale in cui uno dei due lati dell'angolo alla circonferenza passa per il centro, cioè è un diametro.

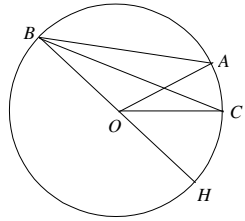


Poiché $AOB + COA = 2R$ (due retti), e $AOB + CBA + BAO = 2R$, si ha che $COA = CBA + BAO$. Ma per (C), $AO = OB$, quindi il triangolo ABO è isoscele, per cui $BAO = CBA$. Dunque $COA = CBA + BAO = 2\,CBA$, ossia (D).

Questo mostra che l'ipotesi (C) svolge un ruolo essenziale nel trovare questo caso speciale di (D). Da tale caso speciale si arriva facilmente a (D). Infatti, oltre al caso speciale sono possibili solo altri due casi, cioè quello in cui l'angolo alla circonferenza ha i due lati da parti opposte rispetto

al diametro, e quello in cui l'angolo alla circonferenza ha i due lati dalla stessa parte rispetto al diametro.

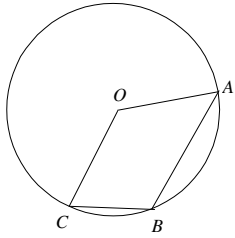


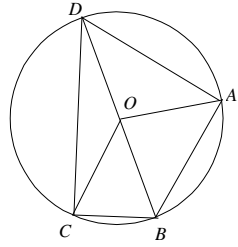


Se l'angolo alla circonferenza ha i due lati da parti opposte rispetto al diametro, per il caso speciale si ha che $COH = 2\,CBH$ e $HOA = 2\,HBA$, perciò $COH + HOA = 2(CBH + HBA)$. Ma allora $COA = COH + HOA = 2(CBH + HBA) = 2\,CBA$, ossia (D).

Se l'angolo alla circonferenza ha i due lati dalla stessa parte rispetto al diametro, per il caso speciale si ha che $HOA = 2\,HBA$ e $HOC = 2\,HBC$, perciò $HOA - HOC = 2(HBA - HBC)$. Ma allora $COA = HOA - HOC = 2(HBA - HBC) = 2\,CBA$, ossia (D).

In che senso (D) esprime una proprietà recondita del cerchio? Per vederlo, consideriamo quale relazione sussiste tra l'angolo al centro COA e l'angolo alla circonferenza CBA quando CBA insiste sul complemento $-AC$ dell'arco AC su cui insiste COA.





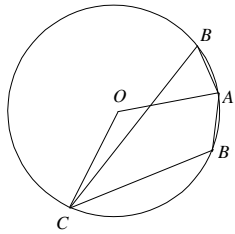
A tale scopo tracciamo il diametro passante per *B*. Allora,

$$\text{(E)} \qquad CBA = 2R - CDA \ .$$

Infatti, poiché $BOD = 2R$, per (D) si ha $BCD = R$. Parimenti, poiché $DOB = 2R$, per (D) si ha $DAB = R$. Ma $DBC + BCD + CDB = 2R$ e $BDA + DAB + ABD = 2R$. Perciò $DBC + CDB = R$, donde

$DBC = R - CDB$, e $BDA + ABD = R$, per cui $ABD = R - BDA$. Ma allora $CBA = DBC + ABD = 2R - (CDB + BDA) = 2R - CDA$, ossia (E).

Il carattere recondito della proprietà del cerchio espressa da (D) sta allora nel fatto che, per (D), finché *B* rimane sull'arco AC, l'angolo alla circonferenza CBA è eguale ad $\frac{1}{2}COA$. Ma, per (E), appena *B* oltrepassa *A* passando sull'arco complementare $-AC$, l'angolo alla circonferenza CBA passa bruscamente da $\frac{1}{2}COA$ a $2R - \frac{1}{2}COA$.



Dunque, piccole differenze di posizione di *B* nelle vicinanze di *A* producono grandi differenze nell'angolo alla circonferenza CBA.

4. Differenze euristiche tra le definizioni

Dal punto di vista della concezione fondazionalista, tra due definizioni equivalenti di uno stesso concetto, non esistono ragioni teoriche per preferire l'una all'altra. Ma questo contrasta col fatto che due definizioni equivalenti di uno stesso concetto possono non essere egualmente idonee per trovare ipotesi su quel concetto.

Per esempio, consideriamo le due definizioni seguenti della sfera.

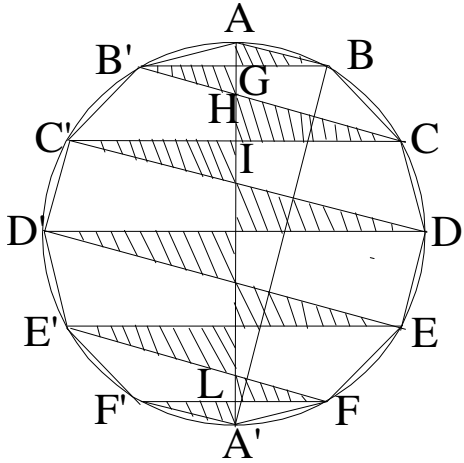
(F) La sfera è una figura solida compresa da una superficie tale che tutte le linee rette che cadono su di essa da un punto tra quelli che giacciono nella figura sono eguali tra loro.

(G) La sfera è una figura solida generata da un cerchio quando viene fatto ruotare intorno ad un diametro fissato.

Tali definizioni hanno la stessa estensione ma non sono egualmente idonee per trovare la seguente ipotesi, dovuta ad Archimede.

(H) «La superficie di una sfera è quattro volte quella del suo cerchio massimo» (Archimede 1972, I, 120).

Di fatto Archimede trovò (H) non basandosi su (F) ma su (G). Il suo procedimento fu il seguente. Consideriamo la sfera nel senso (G) ottenuta facendo ruotare un cerchio intorno al suo diametro AA', e la figura solida ottenuta facendo ruotare un poligono regolare inscritto nel cerchio e avente un numero di lati pari $ABCDEFA'F'E'D'C'B'$ anch'esso intorno ad AA'.



Con tale rotazione il triangolo ABB' genera un cono, mentre il trapezio $BCC'B'$ genera un tronco di cono. Ma,

$$\text{area del cono } ABB' = \frac{1}{2}\pi AB \cdot BB'$$

e

$$\text{area del tronco di cono } BCC'B' = \frac{1}{2}\pi BC(BB'+CC') .$$

Perciò la superficie S della figura solida generata dalla rotazione del poligono $ABCDEFA'F'E'D'C'B'$ è,

$$(1) \qquad S = \frac{1}{2}\pi\left[AB \cdot BB' + BC(BB'+CC') + CD(CC'+DD') + \ldots + A'F \cdot FF'\right].$$

Poiché il poligono è regolare, dev'essere $AB = BC = CD = \ldots$. Inoltre ognuno dei termini $BB', CC', DD', \ldots, FF'$ occorre in (1) due volte. Perciò da (1) si ottiene,

$$(2) \qquad S = \pi AB(BB'+CC'+DD'+...+FF').$$

Per determinare il valore di $BB'+CC'+DD'+...+FF'$ consideriamo i triangoli tratteggiati nella figura. I lati $AB, B'C, C'D, \ldots$ sono tutti paralleli, perciò ad esempio, angolo $ABG =$ angolo $HB'G$, e poiché angolo $BGA =$ angolo $B'GH$, ne segue che i triangoli ABG e $HB'G$ sono simili. Nello stesso modo si vede in generale che

i triangoli $ABG, HB'G, HCI, \ldots$ ecc. sono tutti simili.

Confrontando i lati corrispondenti di questi triangoli si ha,

$$\frac{BG}{AG} = \frac{B'G}{HG} = \frac{CI}{HI} = ... = \frac{F'L}{A'L},$$

perciò,

$$\frac{BG}{AG} = \frac{BG + B'G + CI + ... + F'L}{AG + HG + HI + ... + A'L},$$

cioè,

$$\frac{BG}{AG} = \frac{BB'+CC'+DD'+...+FF'}{AA'},$$

donde,

$$(3) \qquad BB'+CC'+DD'+...+FF' = \frac{AA' \cdot BG}{AG}.$$

Da (2) e (3) si ottiene,

$$(4) \qquad S = \pi AB \cdot \frac{AA' \cdot BG}{AG} = \pi AA' \cdot (\frac{AB \cdot BG}{AG}).$$

Consideriamo ora i triangoli ABG e $AA'B$. Poiché angolo $AGB =$ angolo ABA' e angolo $BAG =$ angolo $A'AB$, tali triangoli sono simili. Perciò,

$$\frac{BG}{AG} = \frac{A'B}{AB}.$$

Da quest'ultima e da (4) si ottiene,

$$S = \pi AA' \cdot \left(\frac{AB \cdot BG}{AG}\right) = \pi AA' \cdot A'B \ .$$

Col crescere del numero dei lati del poligono il lato AB diventa sempre più piccolo, perciò $A'B$ si avvicina sempre di più ad $A'A$, quindi,

$$S \text{ si avvicina sempre di più a } \pi AA' \cdot AA' \ .$$

Ma $AA' = 2r$ dove r è il raggio del cerchio. Dunque,

$$\text{area della sfera} = 4\pi r^2 \ .$$

Poiché la superficie del cerchio massimo della sfera è πr^2, si arriva così ad (H).

Ciò mostra l'importanza che ha avuto per Archimede la definizione (G) per trovare l'ipotesi (H).

37
L'ibridazione

1. Gli ibridi

Un'altra inferenza non-deduttiva per trovare le ipotesi è l'ibridazione, o uso di ibridi.

L'ibridazione è l'inferenza mediante la quale si trasferiscono proprietà dagli oggetti di un certo dominio agli oggetti di un altro dominio, dando luogo ad una parziale sovrapposizione dei due domini.

Come sottolinea Grosholz, in virtù di tale parziale sovrapposizione i due domini «condividono una parte della loro struttura al fine della soluzione di problemi, ma tuttavia conservano il loro carattere distintivo. Come si debba individuare e sfruttare la struttura condivisa non è dato a priori, ma dev'essere stabilito mediante ipotesi. E, mentre ciascun dominio continuerà a generare problemi (e soluzioni) indipendentemente dall'altro, in certa misura il loro accostamento li trasformerà entrambi. Inoltre, nelle aree dove i domini interagiscono esisteranno oggetti, problemi e metodi ibridi», cioè oggetti, problemi e metodi che presentano simultaneamente caratteri di entrambi i domini, e questi ibridi «assumono una vita propria e diventano cruciali per la crescita della conoscenza» (Grosholz 1992, 118).

Se i due domini sono davvero eterogenei, ci si deve aspettare che i loro caratteri siano in contrasto tra loro. Perciò «questi ibridi presentano spesso un'instabilità o incoerenza che però è tenuta a bada o resa trattabile dalle relazioni razionali fornite dalla struttura astratta che tiene insieme i domini» (Grosholz 2000, 88). Di conseguenza, anche se gli ibridi «sono instabili come oggetti della conoscenza», nondimeno «non sono difettosi» (ivi, 89). Infatti, data la loro origine, «essi godono di una molteplicità di descrizioni precise, e la loro multivalenza conferisce ad essi la loro caratteristica incoerenza trattabile e suggestività. Essi sono tenuti a bada sia dalla determinatezza dei domini che danno origine ad essi, sia dalle elaborate strutture astratte che collegano i domini» (*ibid.*).

La multivalenza degli ibridi richiede al matematico di «lavorare al sovrapporsi di due domini», perciò «egli deve saper tollerare la peculiare ambiguità degli ibridi che sono ivi generati» (*ibid.*). D'altra parte, proprio da questa ambiguità dipende la fecondità degli ibridi. In quanto «oggetti che esistono al sovrapporsi di domini», essi «provocano la scoperta in modi inattesi», e «alcuni dei progressi più significativi nella conoscenza matematica hanno luogo nel contesto di tale unificazione parziale» (ivi, 82).

La sovrapposizione dei domini è, comunque, solo parziale, perché resta sempre «una lacuna tra i domini autonomi; tra una struttura astratta e il dominio di oggetti che essa governa, e tra una struttura astratta e i due domini che essa collega; e tra le strutture astratte collegate da un'analogia. E lacune logiche si trovano nel cuore di molti ibridi» (ivi, 89). Tali lacune logiche «impediscono la riscrittura e l'unificazione della matematica come una singola teoria deduttiva» (*ibid.*). È vero che esse «sollecitano l'analogia immaginativa a colmarle. E l'analogia immaginativa, resa stabile e articolata dalla disciplina stessa della costruzione matematica, si presta alla revisione e all'invenzione, cioè alla crescita della conoscenza matematica» (*ibid.*). Ma l'analogia immaginativa non porta ad un'unificazione totale, bensì solo ad una sovrapposizione e unificazione parziale dei domini.

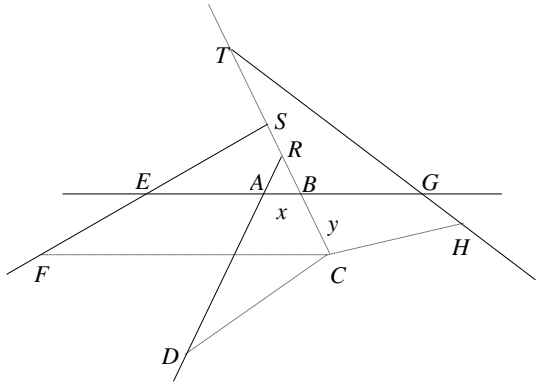
Questo mostra l'inadeguatezza del riduzionismo assiomatico, secondo cui tutte le teorie matematiche sono riducibili ad un'unica teoria assiomatica. All'immagine della matematica proposta dal riduzionismo assiomatico se ne deve sostituire un'altra, secondo cui la matematica va vista «piuttosto come una collezione di domini razionalmente connessi ma autonomi che come un'unità mancata» (ivi, 82). Ciò permette «di formulare il problema: in che modo, sia l'autonomia reciproca dei domini sia la loro connessione razionale rendono possibile la crescita della conoscenza matematica? Le concezioni filosofiche che si fissano sull'unità della matematica generalmente si pongono solo la seconda metà di tale problema, e interpretano la connessione razionale in modo troppo restrittivo» (*ibid.*). Solo abbandonando il riduzionismo assiomatico si elimina tale restrizione.

2. Ibridi e geometria

Un esempio di uso dell'ibridazione per trovare le ipotesi è dato dalla soluzione di Descartes del problema di Pappo. Tale problema può essere formulato nel modo seguente.

> «Se AB, AD, EF, GH» sono quattro «linee date per posizione», si richiede di trovare un punto C dal quale si possano «tracciare altrettante linee rette su quelle date, diciamo CB, CD, CF, CH, in modo che formino con esse angoli dati CBA, CDA, CFE, CHG» e «in modo

che quello che è il prodotto di una parte di queste linee sia eguale a quello che è il prodotto delle altre» (Descartes 1996, VI, 382), in particolare in modo che $CB \cdot CF = CD \cdot CH$. Ma «poiché c'è sempre un'infinità di punti differenti che possono soddisfare questi requisiti, si richiede anche di conoscere e tracciare la linea sulla quale devono trovarsi tutti questi punti» (ivi, VI, 380). Cioè, si richiede di trovare il luogo di tutti tali punti *C*.



La soluzione di Descartes del problema di Pappo si basa sul metodo analitico. Secondo Descartes, per risolvere un problema col metodo analitico, «lo si deve considerare già fatto», ossia già risolto, «e si devono dare dei nomi a tutte le linee che sembrano necessarie per costruirlo, sia a quelle ignote sia alle altre. Poi, senza fare alcuna differenza tra queste linee note e quelle ignote, si deve percorrere la difficoltà, secondo l'ordine che mostra nel modo più naturale di tutti come tali linee dipendono reciprocamente le une dalle altre, finché si sia trovato il modo di esprimere una stessa quantità in due modi: ciò che si chiama un'equazione, perché i termini dell'uno di questi due modi sono eguali a quelli dell'altro» (ivi, VI, 372).

In base a tale procedimento, allora, per risolvere il problema di Pappo col metodo analitico, noi dobbiamo considerarlo già risolto, cioè dobbiamo supporre di aver già trovato un punto *C* avente le proprietà desiderate. Poiché nel problema intervengono molte linee e queste possono farci confondere, scegliamo come linee principali una delle linee note (cioè, delle linee date) e una delle linee ignote (cioè, delle linee che occorre trovare), per esempio AB e CB, e cerchiamo di determinare tutte le altre linee in termini di esse. Prolunghiamo tutte le altre linee date fino a che incontrano queste due, anch'esse prolungate, se necessario. Per esempio, nella figura le linee date incontrano AB nei punti *A*, *E*, *G* e incontrano CB nei punti *R*, *S*, *T*. Diamo dei nomi a tutte le linee che sembrano necessarie per

risolvere il problema. Specificamente, poniamo $AB = x$, $CB = y$, $EA = k$, $AG = l$.

Per ipotesi le lunghezze di CB, CD, CF, CH devono esser tali che $CB \cdot CF = CD \cdot CH$. Ora, la lunghezza di CB $(= y)$ è già nota. Perciò, dobbiamo trovare le lunghezze di CD, CF e CH.

A tale scopo osserviamo che, poiché le linee AB, AD, EF, GH sono date, i segmenti k e l sono noti. Per la stessa ragione gli angoli dei triangoli ARB, DRC, ESB, FSC, BGT, TCH sono noti, o, equivalentemente, tutti i rapporti tra i lati di questi triangoli sono noti. Diamo dei nomi a tali rapporti ponendo,

$$(1) \qquad AB / BR = z / b,$$
$$(2) \qquad CR / CD = z / c,$$
$$(3) \qquad BE / BS = z / d,$$
$$(4) \qquad CS / CF = z / e,$$
$$(5) \qquad BG / BT = z / f,$$
$$(6) \qquad CT / CH = z / g,$$

dove z, b, c, d, e, f, g sono delle costanti.

Poiché $AB = x$, per (1) $BR = bx / z$. Perciò $CR = CB + BR = y + (bx / z)$. Poiché per (2) $CD = c \cdot CR / z$, da quest'ultima si ottiene,

$$(7) \qquad CD = (cy / z) + (cbx / z^2).$$

Poiché $EA = k$, si ha $BE = EA + AB = k + x$, da cui per (3) si ottiene $(k + x) / BS = z / d$. Dunque $BS = (dk + dx) / z$, perciò $CS = BS + CB = ((dk + dx) / z) + y = (dk + dx + yz) / z$. Poiché per (4) $CF / CS \cdot e / z$, da quest'ultima si ottiene,

$$(8) \qquad CF = (edk + edx + eyz) / z^2.$$

Poiché $BG = l - x$, per (5) $BT = (f(l - x)) / z$. Perciò $CT = BC + BT = y + ((fl - fx) / z) = (yz + fl - fx) / z$. Poiché per (6) $CH = g \cdot CT / z$, da quest'ultima si ottiene,

$$(9) \qquad CH = (gyz + gfl - gfx) / z^2.$$

Allora (7), (8) e (9) ci danno le lunghezze di CD, CF e CH. Dunque tali lunghezze «possono sempre esprimersi ciascuna con tre termini: uno dei quali

consiste della quantità ignota y moltiplicata o divisa per qualche altra quantità nota; un altro consiste della quantità ignota x anch'essa moltiplicata o divisa per qualche altra quantità nota; e il terzo consiste di una quantità nota» (ivi, VI, 384-385).

Sostituendo CB, CD, CF e CH con le lunghezze date da y, (7), (8), (9) in $CB \cdot CF = CD \cdot CH$, da quest'ultima otteniamo un'equazione di secondo grado in x e di secondo grado in y.

Tale equazione permette di costruire punto per punto il luogo di tutti i punti C cercato. Infatti, assegnando un dato valore a y, tale equazione diventa un'equazione di secondo grado in x. Ma allora il problema di costruire punto per punto il luogo di tutti i punti C si riduce a quello di risolvere un'equazione di secondo grado in x. Infatti, se sappiamo risolvere tale equazione, allora, «prendendo successivamente infinite grandezze differenti per la linea y, si troveranno anche infinite grandezze differenti per la linea x, e così si avrà un'infinità di punti differenti, come quello indicato con C, mediante i quali si descriverà la curva richiesta» (ivi, VI, 386). Cioè, si costruirà il luogo di tutti i punti C. Ma noi sappiamo risolvere un'equazione di secondo grado in x. Perciò il problema di costruire punto per punto il luogo di tutti i punti C è risolto. Dunque il problema di Pappo è risolto.

Dalla soluzione di Descartes del problema di Pappo appare chiaro che Descartes non solo riduce tale problema a quello di risolvere un'equazione algebrica, ma ad ogni passo tratta il problema di Pappo in termini che sono nello stesso tempo algebrici e geometrici. Egli usa nello stesso tempo risultati algebrici per risolvere equazioni e risultati geometrici per trovare relazioni tra linee. Dunque considera i suoi oggetti sia come oggetti algebrici che come oggetti geometrici, ossia li considera come degli ibridi.

3. Ibridi e calcolo infinitesimale

Un altro esempio di uso dell'ibridazione per trovare le ipotesi è dato dal modo in cui Leibniz arriva a formulare le regole del calcolo infinitesimale.

Egli parte dall'osservazione che nel triangolo di Pascal ogni serie di numeri «è la sommatrice della serie immediatamente precedente, ed è il differenziale della serie immediatamente successiva» (Leibniz 1971, V, 405). Cioè, ogni termine della serie si ottiene sommando tutti i termini fino al termine corrispondente della serie immediatamente precedente, e sottraendo dal termine corrispondente il suo predecessore nella serie immediatamente successiva.

1	1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...	
1	3	6	10	15	...		

1	4	10	20	...
1	5	15	...	
1	6	...		
1	...			

Esaminando le serie di numeri nel triangolo di Pascal, Leibniz fornisce espressioni algebriche per i termini delle serie e regole che governano le relazioni tra tali espressioni.

Per esempio se, come in questo caso, la serie originaria è 1, 2, 3, 4, ..., Leibniz designa con *x* un termine qualsiasi di tale serie e con *dx* un termine qualsiasi della serie delle differenze. Dunque $dx = 1$, cioè è una costante. Se la serie originaria è 1, 4, 9, 16, ..., egli designa con x^2 un termine qualsiasi di tale serie e con dx^2 un termine qualsiasi della serie delle differenze. Dunque $dx^2 = 2x + 1$ perché nella serie 1, 4, 9, 16, ... il successore di x^2 è $x^2 + 2x + 1$ e «la loro differenza è 2*x*+1» (ivi, V, 406). Nello stesso modo Leibniz procede se la serie originaria è 1, 8, 27, 64, ... , e così via. Maggiori difficoltà Leibniz incontra nel caso della serie delle somme. Egli riesce a trattare tale serie solo in alcuni casi particolari, tuttavia osserva che la formazione della serie delle differenze e quella della serie delle somme sono l'una l'inversa dell'altra.

Dall'aritmetica Leibniz passa poi alla geometria, considerando le espressioni algebriche come modi di indicare delle curve. Egli lo fa basandosi su un'analogia tra il dominio aritmetico e quello geometrico, ma questo comporta un salto. Per esempio, mentre nel caso aritmetico la variabile *x* rappresenta una successione infinita di numeri naturali e *dx* rappresenta la differenza tra essi, cioè una grandezza finita, nel caso geometrico la variabile *x* rappresenta una successione infinita di ascisse contigue e *dx* rappresenta la differenza tra esse, cioè una grandezza infinitesima. Dunque, per poter usare l'analogia, Leibniz compie un'escursione nell'infinitamente piccolo.

Basandosi sull'analogia, Leibniz usa le relazioni tra i termini delle serie delle differenze e somme, stabilite nel caso aritmetico finito, come guida per determinare le relazioni tra i termini delle serie delle differenze e somme nel caso geometrico infinito, e arriva così a formulare le regole del calcolo infinitesimale. Anche qui egli non ha difficoltà a formulare le regole che governano tali relazioni nel caso delle serie delle differenze, ma non riesce a dare un insieme completo di regole che governano le relazioni nel caso delle serie delle somme. L'integrazione è un'operazione molto più difficile della differenziazione.

L'analogia che guida Leibniz nella formulazione delle regole del calcolo infinitesimale è imperfetta, perché le regole che governano le relazioni tra i termini delle serie delle differenze nel caso aritmetico non sono esattamente le stesse di quelle che governano le relazioni tra i termini delle

serie delle differenze nel caso geometrico. Per esempio, nel caso aritmetico $dx^2 = 2x + 1$ mentre nel caso geometrico $dx^2 = 2x$. Nondimeno l'imperfezione dell'analogia non fuorvia Leibniz, sicché, tenendo ben presenti le differenze tra il caso aritmetico e quello geometrico, egli arriva a formulare le regole del calcolo infinitesimale.

La formulazione di tali regole usa l'ibridazione, perché basarsi sull'analogia tra le serie delle differenze e somme nel caso geometrico, e le serie delle differenze e somme nel caso aritmetico, vuol dire trattare le curve indicate dalle espressioni algebriche nello stesso tempo come curve continue e come oggetti combinatori (poligoni con un numero infinito di lati infinitamente piccoli che però possono essere oggetto di computo come i lati dei poligoni con un numero finito di lati), ossia come degli ibridi. Così «si possono esprimere mediante equazioni locali e trattare col calcolo anche quelle curve che Descartes escluse dalla geometria in quanto meccaniche» (ivi, V, 408).

L'introduzione di tali ibridi permette a Leibniz, da un lato, di applicare ad essi sia risultati della geometria euclidea sia risultati della teoria dei numeri, e, dall'altro lato, di risolvere problemi geometrici non solubili in termini puramente geometrici, e problemi aritmetici relativi a serie infinite non solubili in termini puramente aritmetici.

38
La variazione dei dati

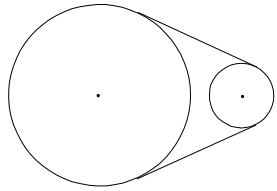
1. La variazione totale dei dati

Un'altra inferenza non-deduttiva per trovare le ipotesi è la variazione dei dati. Anzi questa, secondo Pólya, costituisce l'ultima risorsa per risolvere un problema perché, «se non vediamo altri approcci al problema proposto, possiamo provare a variare i dati» (Pólya 1962, 101).

La variazione dei dati può assumere varie forme. In seguito ne esamineremo due.

Un primo tipo di variazione dei dati è la variazione totale dei dati. Essa è l'inferenza mediante la quale si passa da un problema ad un altro facendo variare tutti i dati del problema. Per illustrarla consideriamo, ad esempio, il seguente problema.

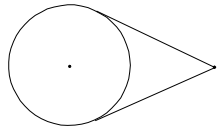
(A) Costruire le tangenti esterne comuni a due cerchi dati esterni l'uno all'altro.



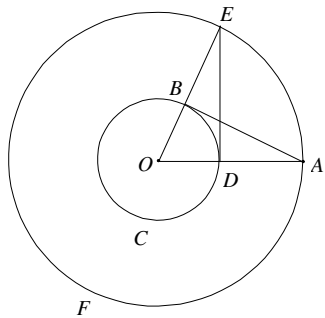
Per risolvere tale problema procediamo per variazione totale dei dati, che qui sono costituiti da due cerchi esterni l'uno all'altro. Specificamente, facciamo diminuire i raggi di entrambi i cerchi uniformemente, cioè in modo che entrambi diminuiscano della stessa lunghezza nello stesso tempo, fino a che il

cerchio minore si riduce ad un punto. Allora (A) si trasforma nel seguente nuovo problema.

(B) Costruire le tangenti ad un cerchio dato da un punto dato esterno ad esso.



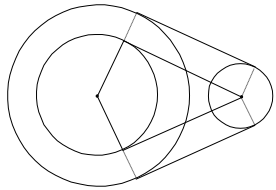
Per risolvere (B) procediamo nel modo seguente. Detti BCD il cerchio dato e A il punto dato, congiungiamo il centro O del cerchio col punto A mediante la retta OA, e con centro O e raggio OA tracciamo il cerchio AEF. Da D tracciamo la retta DE perpendicolare ad OA, ed inoltre tracciamo OE e AB.



Allora AB è una tangente del cerchio BCD tracciata dal punto A. Infatti, $OA = OE$ e $OD = OB$ ed inoltre OA, OE e OD, OB contengono un angolo comune. Dunque i triangoli DOE e BOA hanno due lati eguali e gli angoli contenuti dai lati eguali sono eguali. Di conseguenza anche i lati rimanenti DE, AB sono eguali, i triangoli DOE e BOA sono eguali e gli angoli rimanenti sono eguali. Perciò l'angolo ODE è eguale all'angolo OBA. Ma per costruzione ODE è retto, quindi anche OBA è retto. Dunque AB forma un angolo retto con OB e quindi è una tangente del cerchio BCD tracciata dal punto A. Nello stesso modo si costruisce l'altra tangente. Ciò risolve (B).

Da questa soluzione di (B) si ottiene facilmente una soluzione di (A). Infatti, consideriamo un nuovo cerchio concentrico al cerchio maggiore dato e di raggio eguale alla differenza tra i raggi dei due cerchi dati. Col

procedimento usato nella soluzione di (B) tracciamo le tangenti dal centro del minore dei due cerchi dati a tale nuovo cerchio.



A questo punto, per ottenere le tangenti esterne dei due cerchi dati, basta costruire due rettangoli, le cui basi sono le tangenti del nuovo cerchio tracciate dal centro del minore dei due cerchi dati, e le cui altezze sono la differenza tra i raggi dei due cerchi concentrici. Questo risolve (A).

2. La variazione parziale dei dati

Un altro tipo di variazione dei dati è la variazione parziale dei dati. Essa è l'inferenza mediante la quale si passa da un problema ad un altro facendo variare certi dati del problema e mantenendo fissi i rimanenti. Per illustrarla consideriamo, ad esempio, il seguente problema.

(C) Date n ascisse differenti $x_1,...,x_n$ e n ordinate corrispondenti $y_1,...,y_n$, trovare il polinomio $f(x)$ di grado minimo che soddisfa le condizioni $f(x_1)=y_1,...,f(x_n)=y_n$.

Per risolvere tale problema procediamo per variazione parziale dei dati, che qui sono costituiti dalle ascisse $x_1,...,x_n$ e dalle ordinate corripondenti $y_1,...,y_n$. Specificamente, per una i qualsiasi fissata, $1 \le i \le n$, facciamo variare soltanto l'ordinata y_i mantenendo eguali a 0 tutte le altre ordinate. In altri termini, facciamo corrispondere alle ascisse $x_1,...,x_n$ l'ordinata $0,...,y_i,...,0$, che consta di tutti 0 eccetto y_i. Così (C) si trasforma nel seguente nuovo problema.

(D) Date n ascisse differenti $x_1,...,x_n$ ed n ordinate corrispondenti $0,...,y_i,...,0$, trovare il polinomio $f(x)$ di grado minimo che soddisfa le condizioni $f(x_1)=0,...,f(x_i)=y_i,...,f(x_n)=0$.

Per risolvere tale problema osserviamo che un polinomio che soddisfa le condizioni $f(x_1)=0,...,f(x_i)=y_i,...,f(x_n)=0$ deve annullarsi in $n-1$ punti, deve avere $n-1$ radici differenti, e perciò deve avere grado minimo $n-1$. Ma allora esso deve avere la forma,

$$(1) \quad f(x)=k(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)\ ,$$

per qualche costante *k*. In corrispondenza dell'ascissa x_i il valore di (1) sarà,

$$(2) \quad f(x_i)=k(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)=y_i\ .$$

Ricavando da (2) il valore di *k* e sostituendolo in (1) otteniamo il polinomio,

$$(3) \quad f(x)=y_i\frac{(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}\ .$$

Chiaramente tale polinomio assume i valori richiesti $f(x_1)=0,...,f(x_i)=y_i,...,f(x_n)=0$. Questo risolve (D).

Da tale soluzione di (D) si ottiene facilmente una soluzione di (C). Infatti, facendo variare via via ciascuna delle ordinate y_i, $1\le i\le n$, e mantenendo eguali a 0 tutte le altre ordinate, da (3) otteniamo *n* polinomi. Sommando tali *n* polinomi otteniamo il polinomio,

$$(4) \quad f(x)=\sum_{i=1}^{n} y_i\frac{(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}\ .$$

Tale polinomio (4) è di grado non superiore ad $n-1$ e chiaramente soddisfa le condizioni $f(x_1)=y_1,...,f(x_n)=y_n$. Questo risolve (C).

Il polinomio (4) è la cosiddetta formula di interpolazione di Lagrange: di interpolazione perché, conoscendo i valori del polinomio (4) in *n* punti distinti, mediante (4) si può calcolare il valore del polinomio in qualsiasi altro punto.

39
Completamento del metodo

1. Le inferenze non-deduttive come insieme aperto

Con la variazione dei dati concludiamo l'esame delle inferenze non-deduttive per trovare le ipotesi.

Questo non significa che, oltre alle inferenze non-deduttive che abbiamo considerato qui (induzione, analogia, uso della figura, generalizzazione, particolarizzazione, metafora, metonimia, definizione, ibridazione, variazione dei dati), non possano esisterne altre. Le inferenze non-deduttive per trovare le ipotesi non sono un insieme chiuso, dato una volta per sempre, bensì un insieme aperto.

In un sistema basato sul metodo analitico, non solo le ipotesi non sono date dall'inizio, una volta per sempre, ma anche le inferenze non-deduttive per trovare le ipotesi non sono date dall'inizio, una volta per sempre, e possono sempre essere estese aggiungendone di nuove. Lo sviluppo di un sistema basato sul metodo analitico può avvenire non solo usando inferenze non-deduttive di tipo noto, ma anche introducendo inferenze non-deduttive di tipo nuovo. Anzi, l'introduzione di inferenze non-deduttive di tipo nuovo costituisce un importante sviluppo del metodo analitico.

2. Precisazioni ed aggiunte sulle inferenze non-deduttive

Sulla natura e sull'uso delle inferenze non-deduttive si possono porre vari problemi. Ad alcuni di essi abbiamo già dato una risposta, che però sembra opportuno ricordare.

1) Le inferenze non-deduttive per trovare le ipotesi sono davvero inferenze? Certo, non lo sono nel senso che le premesse ci diano, come nel caso delle inferenze deduttive, ragioni conclusive per credere nella conclusione in quanto questa è contenuta nelle premesse. Ma lo sono nel

senso che le premesse ci danno ragioni per credere nella conclusione che sono significativamente maggiori di quelle che avremmo se scegliessimo la conclusione a caso. Spesso, di fronte a due ipotesi opposte, non abbiamo le stesse ragioni per credere in esse ma, in base all'evidenza disponibile, giudichiamo che vi sono più ragioni per credere nell'una piuttosto che nell'altra. Nel giudicarlo effettuiamo un'inferenza non-deduttiva, la cui premessa è l'evidenza disponibile e la cui conclusione è l'ipotesi più credibile.

2) Che genere di inferenze sono le inferenze non-deduttive per trovare le ipotesi? Non sono operazioni mediante le quali si passa da certe proposizioni ad un'altra proposizione, bensì operazioni mediante le quali si passa da certi dati ad un altro dato. Per esempio, l'uso della figura è un'operazione mediante la quale si passa dai dati forniti dall'osservazione di una figura ad un'ipotesi.

3) Quale inferenza non-deduttiva occorre applicare per trovare un'ipotesi? Questa domanda non ammette una risposta univoca, anzitutto perché l'inferenza non-deduttiva da applicare dipende dalla natura del problema che si vuol risolvere, e in secondo luogo perché si può trovare l'ipotesi mediante più inferenze non-deduttive. Non vi è una regola generale per stabilire quale di esse usare, ma si deve vedere caso per caso quale risulta più utile.

4) Si può applicare un'inferenza non-deduttiva in modo meccanico, cioè esiste un algoritmo mediante il quale, date le premesse, si può trovare la conclusione? Un tale algoritmo esiste nel caso delle inferenze deduttive, perché in esse la conclusione è contenuta nelle premesse, e l'algoritmo deve semplicemente estrarre dalle premesse qualcosa che è già contenuto in esse. In generale, invece, esso non esiste nel caso delle inferenze non-deduttive, perché in tali inferenze la conclusione non è contenuta nelle premesse, ma dà nuova informazione non riducibile ad esse né ricavabile in modo meccanico da esse. Inferenze non-deduttive meccaniche, come l'induzione meccanica, non sono inferenze non-deduttive in senso proprio perché sono riducibili alla deduzione.

5) Mediante un'inferenza non-deduttiva, dalle stesse premesse si possono trarre conclusioni differenti? A questa domanda si deve rispondere affermativamente, perché in un'inferenza non-deduttiva la conclusione non è contenuta nelle premesse, e perciò le premesse sono compatibili con più conclusioni. Per esempio, è stato calcolato il primo milione di cifre 3.14159253... dello sviluppo decimale di π ed è stato visto che tali cifre sono casuali, cioè non seguono alcuno schema. Da ciò si può inferire sia che tutte le cifre di π sono casuali sia che il primo milione di cifre di π è casuale e le cifre successive consistono di tutti 7. Entrambe queste conclusioni, infatti, sono compatibili con l'evidenza esistente.

6) Qual è la giusta applicazione di un'inferenza non-deduttiva? Questo problema nasce dal fatto che, come abbiamo detto, mediante un'inferenza non-deduttiva, dalle stesse premesse si possono trarre conclusioni differenti. Ora, è chiaro che nessuna applicazione di un'inferenza non-deduttiva è giusta in sé, ma lo è soltanto rispetto al problema da risolvere. Perciò, per determinare qual è la giusta applicazione di un'inferenza non-deduttiva, si deve analizzare il problema e vedere quale conclusione è più utile per risolverlo.

7) La conclusione di un'inferenza non-deduttiva è probabile? Secondo un diffuso pregiudizio, un'inferenza non-deduttiva è un'inferenza la cui conclusione segue dalle premesse con probabilità. Addirittura, alcuni identificano inferenza non-deduttiva e probabilità, poiché parlano di «logica non-deduttiva, o probabilità logica» (Franklin 1987, 1). In realtà è improprio dire che la conclusione di un'inferenza non-deduttiva segue dalle premesse con probabilità. Per esempio, la conclusione di un'induzione da un solo caso segue dalla premessa con una probabilità che, quando il numero dei casi possibili è molto grande, è molto piccola, ma questo non esclude che essa possa essere plausibile. Probabilità e plausibilità in generale non concordano. La plausibilità non riguarda la probabilità bensì la compatibilità con la conoscenza esistente. La conclusione di un'inferenza non-deduttiva può non essere probabile, e tuttavia può essere plausibile, anzi, può persino essere più plausibile delle premesse.

3. Completamento del metodo analitico

Con la descrizione delle inferenze non-deduttive per trovare le ipotesi completiamo la formulazione del metodo analitico. Un tale completamento era necessario perché, sebbene il metodo analitico sia il procedimento basilare per risolvere i problemi matematici, esso non offre ancora una base sufficiente per una logica della scoperta matematica, in quanto non indica i mezzi per trovare le ipotesi.

Parimenti, con la descrizione delle inferenze non-deduttive per trovare le ipotesi, completiamo la formulazione dell'assunzione del mondo aperto, così come anche la formulazione della concezione euristica. Infatti, sia l'assunzione del mondo aperto sia la concezione euristica si basano sul metodo analitico, e possono dirsi esaurientemente descritte solo una volta completata la formulazione di tale metodo.

Naturalmente, tutti questi completamenti non significano che abbiamo dato un insieme chiuso di inferenze non-deduttive. Le inferenze non-deduttive per trovare le ipotesi rimangono un insieme aperto. Questo costituisce una fondamentale differenza tra la concezione euristica e la concezione fondazionalista. Mentre in base a quest'ultima le inferenze deduttive mediante le quali si ottengono i teoremi a partire dagli assiomi sono

un insieme chiuso, in base alla prima le inferenze non-deduttive per trovare le ipotesi sono sempre un insieme aperto.

40
Concezione euristica e oggetti matematici

1. Gli oggetti matematici come ipotesi

Nei capitoli precedenti abbiamo visto come la concezione euristica tratta il problema della scoperta matematica. Non abbiamo ancora visto, invece, come tratta il problema dell'esistenza degli oggetti matematici.

La concezione euristica assegna a tale problema un ruolo ed un significato del tutto diversi da quelli assegnati ad esso dalla concezione fondazionalista. Considerando la matematica come conoscenza plausibile e non assolutamente certa, essa non deve chiedersi di che cosa la matematica è conoscenza assolutamente certa, in particolare se è conoscenza assolutamente certa di oggetti dotati di un qualche tipo di esistenza. Inoltre, identificando il metodo della matematica col metodo analitico, nel quale l'intuizione non svolge alcun ruolo, la concezione euristica non deve chiedersi se la matematica è intuizione di oggetti dotati di un qualche tipo di esistenza.

È vero che Platone, a cui si deve la prima teorizzazione del metodo analitico, ritiene che gli oggetti matematici esistano indipendentemente dalla mente, dal linguaggio e dalle convenzioni del matematico e possano essere colti pienamente solo mediante l'intuizione, che è «l'occhio dell'anima» (Platone, *Respublica*, VII 533 d 2). Ma questo, secondo Platone, non serve al matematico per risolvere i suoi problemi perché, finché la sua anima rimane invischiata nel corpo, egli non può cogliere pienamente gli oggetti matematici mediante l'intuizione.

Perciò, per risolvere un problema matematico, il matematico introduce come ipotesi oggetti dotati di certe proprietà. Infatti, «coloro che si occupano di geometria, di aritmetica o di altre scienze del genere, procedono formulando delle ipotesi, per esempio il pari e il dispari, le figure geometriche, le tre specie di angoli, e altre simili, in relazione all'oggetto della ricerca. Questi elementi essi danno per conosciuti, in quanto premesse ipotetiche» (ivi, VI 510 c 2-6). Le proprietà degli oggetti matematici non

vengono colte mediante l'intuizione ma attraverso la formulazione di ipotesi, quindi mediante il pensiero discorsivo. Infatti, si deve considerare «pensiero discorsivo, e non intuizione, la condizione della geometria e delle altre scienze del genere, ossia un pensiero che si colloca in una zona intermedia tra l'opinione e l'intuizione» (ivi, VI 511 d 2-5).

Dal punto di vista della concezione euristica, l'atteggiamento del matematico nei confronti degli oggetti matematici non è, dunque, quello di chi si pone di fronte ad oggetti esistenti indipendentemente dalla mente, dal linguaggio e dalle sue stesse convenzioni e ne coglie le proprietà mediante l'intuizione, bensì quello di chi, per risolvere problemi matematici, introduce come ipotesi oggetti dotati di certe proprietà. Pertanto gli oggetti matematici sono ipotesi per la soluzione di problemi.

Ma allora parlare di oggetti matematici è un po' fuorviante perché, mentre nella concezione fondazionalista il termine 'oggetto' designa ciò di cui si occupa l'indagine, nella concezione euristica esso designa le ipotesi, che sono invece gli strumenti dell'indagine.

2. Caratteri degli oggetti matematici come ipotesi

Questa spiegazione della natura degli oggetti matematici dal punto di vista della concezione euristica, richiede alcune precisazioni.

1) Che il matematico introduca come ipotesi oggetti dotati di certe proprietà non significa che egli ne assuma l'esistenza. Le ipotesi, fissando proprietà degli oggetti matematici, ne caratterizzano l'identità ma non ci dicono nulla sulla loro esistenza. Caratterizzare l'identità di un oggetto matematico non implica assumere che esso esista più di quanto caratterizzare l'ippogrifo come un cavallo alato implichi assumere che esso esista. L'identità precede l'esistenza e non la implica. Lo statuto degli oggetti matematici è simile a quello degli oggetti della fisica. Che il fisico, nella teoria delle stringhe, introduca come ipotesi stringhe che non occupano alcuno spazio perché hanno una lunghezza ma diametro nullo, non implica che egli assuma che esistano oggetti del genere.

2) Che il matematico introduca come ipotesi oggetti dotati di certe proprietà significa che l'identità degli oggetti matematici è determinata dalle ipotesi che si fanno su di essi e cambia se si cambiano tali ipotesi. Per esempio, tanto Euclide quanto Cantor si occupano di segmenti di retta. Ma Euclide lo fa basandosi sull'ipotesi che un segmento di retta sia una linea che giace egualmente rispetto ai punti su di essa (cioè, rispetto ai suoi punti) e ha due punti estremi. Cantor, invece, lo fa basandosi sull'ipotesi che un segmento di retta sia un insieme con un'infinità non numerabile di elementi (punti).

3) Che gli oggetti matematici siano introdotti dal matematico come ipotesi non significa che egli ne conosca tutte le proprietà. Che essi siano introdotti dal matematico, infatti, non autorizza ad affermare che il

matematico ne conosce tutte le proprietà più di quanto che un quadro sia dipinto da un pittore autorizzi ad affermare che il pittore ne conosce tutte le proprietà. Sbaglia, perciò, Gödel quando dice che «il creatore necessariamente conosce tutte le proprietà delle sue creature, perché queste non possono averne altre che quelle che egli ha dato loro» (Gödel 1986- , III, 311). In questo modo Gödel trascura che le creature, quando vengono messe in relazione con altri oggetti, acquistano nuove proprietà, non comprese tra quelle che il creatore ha dato loro.

4) Che le ipotesi, fissando certe proprietà degli oggetti matematici, ne caratterizzino l'identità, non significa che esse la caratterizzano completamente e definitivamente. L'identità degli oggetti matematici è sempre suscettibile di nuovi approfondimenti, perché gli oggetti matematici non sono chiusi in se stessi ma sono aperti alle interazioni con altri oggetti. Essi non sono mai completamente realizzati ma sono suscettibili di indefiniti sviluppi, e non hanno un'unica faccia ma ne posseggono molte. L'approfondimento dell'identità degli oggetti matematici avviene sostituendo un'ipotesi con un'altra più soddisfacente. Questo processo non ha mai termine, perché gli oggetti matematici sono aperti alle interazioni con altri oggetti, sono suscettibili di indefiniti sviluppi e hanno molte facce, quindi la loro identità non può mai essere determinata completamente e definitivamente. Dunque su di essi si possono formulare sempre nuove ipotesi.

5) Che sugli oggetti matematici si possano formulare sempre nuove ipotesi, significa che essi rimangono sempre allo stato di ipotesi per risolvere particolari problemi. Talora, però, accade che certi oggetti matematici risultino utili anche per risolvere problemi diversi da quello per cui erano stati introdotti originariamente. Gli oggetti per i quali questo accade si consolidano, si cristallizzano, acquistano una stabilità che li rende ampiamente indipendenti dalla loro origine e, da ipotesi per risolvere particolari problemi, diventano essi stessi un oggetto principale di studio. Se ne stabiliscono le proprietà e, col tempo, si raggiunge una tale familiarità con essi da avere l'impressione che siano dotati, e da trattarli come se fossero dotati, di un'esistenza autonoma. Essi ci appaiono allora non più come «il prodotto arbitrario della nostra mente», ma come oggetti esistenti «al di fuori di noi, con lo stesso carattere di necessità delle cose della realtà oggettiva», e ci sembra che «noi li incontriamo o li scopriamo, e li studiamo, come i fisici, i chimici e gli zoologi» (Hermite-Stieltjes 1905, II, 398). Ma si tratta soltanto di un'illusione, che deriva dalla nostra grande familiarità con essi.

Altri oggetti matematici, invece, non riescono a consolidarsi e a cristallizzarsi, rimangono in una condizione di instabilità e, dopo un periodo in cui sembrano sempre sul punto di stabilizzarsi, vengono abbandonati e scompaiono più o meno definitivamente dalla scena. A differenza dei precedenti questi oggetti hanno dunque, per così dire, un'esistenza effimera. Essi non riescono mai a «compiere il passo finale verso l'esistenza

autonoma», il loro statuto è quello di «entità in un certo senso in bilico tra l'essere e il non essere, che dopo un periodo più o meno lungo, in cui sembravano sul punto di concretizzarsi, si dissolvono senza aver dato luogo a nulla di reale, talvolta scomparendo completamente dalla matematica, altre volte regredendo allo stadio iniziale di metodi di ricerca» (Giusti 1999, 51).

Tale è il caso, ad esempio, degli infinitesimi, che nel Seicento non riuscirono mai a stabilizzarsi e a diventare oggetto di studio. Non ne venne mai data una vera definizione, ma solo descrizioni vaghe e talvolta pittoresche, come quella che essi fossero «una perpetua flussione verso il nulla» (Bernoulli 1993, 158). Ad essi furono attribuite proprietà contraddittorie, tanto che Berkeley arrivò a chiedersi se «l'introduzione di cose così inconcepibili» non fosse «una vergogna per la matematica» (Berkeley 1948-57, IV, 98). Anche quando nel Novecento gli infinitesimi sono stati riesumati da Robinson con la sua analisi non-standard, essi non sono stati apprezzati dalla generalità dei matematici, a causa della loro scarsa fecondità nella soluzione di problemi. Per questo motivo sono rimasti entità in bilico tra l'essere e il non essere.

3. Il finzionalismo

Si potrebbe pensare che il fatto che, per la concezione euristica, gli oggetti matematici rimangano sempre allo stato di ipotesi, implichi che essi sono finzioni. Se così fosse, la concezione degli oggetti matematici della concezione euristica si ridurrebbe a quella del finzionalismo, secondo cui «tutti gli oggetti matematici sono finzioni» (Bunge 1997, 68). In realtà, invece, la concezione euristica assegna agli oggetti matematici uno statuto del tutto diverso dal finzionalismo. Per vederlo, dobbiamo dare anzitutto una descrizione più dettagliata di quest'ultimo.

Secondo il finzionalismo, gli oggetti matematici «esistono in un 'mondo' a parte, al pari di altre finzioni quali i miti e le favole» (ivi, 69). Tale mondo a parte non è in alcun modo reale. Quando leggiamo *Don Chisciotte* «possiamo fingere che egli esista al pari dei frutti della sua immaginazione malata. E, assistendo ad una rappresentazione dell'*Otello*, possiamo credere per un momento che Otello uccida davvero Desdemona. Ma, quando pensiamo criticamente a queste e ad altre opere di finzione, noi non le scambiamo per resoconti fattuali, a meno che ovviamente non siamo pazzi. Le raggruppiamo sotto le finzioni artistiche» (ivi, 53). Nello stesso modo, quando parliamo di oggetti matematici, possiamo fingere che essi esistano, ma non li scambiamo per oggetti realmente esistenti: li classifichiamo come finzioni. Perciò la matematica è più vicina alle arti che alle scienze naturali. I matematici non si occupano di cose realmente esistenti ma, «al pari dei pittori astratti, degli scrittori di letteratura fantastica e dei creatori di cartoni animati, si occupano di finzioni» (ivi, 52).

Anche la nozione di verità matematica è più vicina a quella di verità artistica che a quella di verità scientifica. Infatti, la verità matematica non ha alcuna relazione col mondo esterno ma, come quella artistica, è puramente interna. Per «stabilire la verità o falsità artistica di una finzione artistica, noi ricorriamo soltanto all'opera d'arte considerata» (ivi, 53). Nello stesso modo, per stabilire la verità o falsità di una finzione matematica, noi ricorriamo soltanto al sistema di assiomi corrispondente, perché una proposizione matematica è vera se e solo se è deducibile dagli assiomi. Dunque la verità matematica, come quella artistica, «vale soltanto in un certo contesto», cioè nel contesto del sistema di assiomi, rispettivamente, nel contesto dell'opera d'arte, «e non deve avere alcuna relazione col mondo esterno» (ivi, 63). Invece le verità scientifiche «sono assolute e indipendenti dal contesto» (*ibid.*). Inoltre, ovviamente, esse devono stare in relazione col mondo esterno.

La nozione di verità matematica come verità interna può essere meglio precisata in termini di quella di verità in una storia. La proposizione «'2+2=4' è vera all'incirca nello stesso senso in cui la proposizione 'Oliver Twist abitava a Londra' è vera: quest'ultima è vera solo nel senso che è vera in una certa storia ben nota, e la prima è vera solo in quanto è vera nella matematica standard» (Field 1989, 3). Come la proposizione 'Oliver Twist abitava a Londra' è vera solo nel senso che Oliver Twist abitava a Londra nella storia raccontataci da Dickens nell'opera omonima, così la proposizione '2+2=4' è vera solo nel senso che 2+2 è eguale a 4 nella storia raccontataci nell'aritmetica.

Una proposizione matematica può essere vera in una storia e falsa in un'altra. Per esempio, la proposizione 'esistono molti insiemi vuoti' è vera nella storia raccontataci da Whitehead e Russell nella teoria dei tipi, ed è falsa nella storia raccontataci da Zermelo e Fraenkel nella teoria degli insiemi ZFC. Inoltre, una proposizione matematica può non essere né vera né falsa in una storia. Per esempio, in base al risultato di Cohen sull'indipendenza dell'ipotesi del continuo, tale ipotesi non è né vera né falsa in ZFC. Perciò, aggiungendo agli assiomi di ZFC l'ipotesi del continuo o la sua negazione, si ottengono due continuazioni differenti della storia raccontataci da Zermelo e Fraenkel in ZFC.

Secondo il finzionalismo, non ha senso chiedersi quale di queste continuazioni di ZFC sia quella corretta. Per esempio, Shakespeare nell'*Amleto* non ci dice se Guildenstern abbia mai detto: 'le unghie del piede, d'altra parte, non crescono mai'. Ma esistono «continuazioni dell'*Amleto*, coerenti con quella storia, in cui Guildenstern non ha mai detto nulla del genere, e altre in cui lo ha detto» (Wagner 1982, 263). Chiaramente «non ha senso chiedersi quale di queste continuazioni sia davvero la continuazione corretta dell'*Amleto*», ma «possiamo coerentemente raccontarne una in un'occasione e un'altra in un'altra occasione» (*ibid.*). Nello stesso modo, non ha senso chiedersi quale delle continuazioni di ZFC sia quella corretta, ma

possiamo coerentemente raccontarne una in un'occasione e un'altra in un'altra occasione.

4. Ipotesi contro finzioni

Alla luce di questa descrizione del finzionalismo, possiamo chiarire perché la concezione euristica assegna agli oggetti matematici uno statuto del tutto diverso da esso. Ciò dipende dal fatto che tra le ipotesi e le finzioni vi è una sostanziale differenza. Le finzioni non hanno nulla a che fare con la realtà, prescindono dalla nostra esperienza e non possono essere controllate da essa. Le ipotesi, invece, aspirano a dare una spiegazione della realtà.

Come osserva Vaihinger, mentre «la finzione viene posta con la consapevolezza che essa costituisce un modo di rappresentazione inadeguato, soggettivo, cieco, la cui congruenza con la realtà è esclusa fin dall'inizio e che pertanto non può essere verificata», l'ipotesi «vuol essere un'espressione adeguata di una realtà ancora ignota, e vuole raffigurare appropriatamente tale realtà oggettiva» (Vaihinger 1927, 606).

Certo, la determinazione della realtà data dall'ipotesi «è solo una determinazione provvisoria, ma il fine a cui tende tale determinazione è la sua compiutezza teoretica e la sua conferma mediante i fatti dell'esperienza» (ivi, 147). Inoltre, ogni ipotesi è destinata ad essere sostituita da un'altra, ma lo è «proprio perché la rappresentazione ipotetica rientra a pieno titolo nell'ambito di ciò che si è assunto come reale. Invece la determinazione provvisoria della finzione è del tutto differente: la finzione, nella misura in cui l'abbiamo connotata come una struttura ausiliaria provvisoria, deve, nel corso del tempo, venir meno e lasciare posto alla determinazione reale» (*ibid.*).

Dunque, tra la finzione e l'ipotesi vi è la sostanziale differenza che «la finzione è una mera struttura ausiliaria, una semplice deviazione, una mera impalcatura che dev'essere di nuovo smontata, mentre l'ipotesi attende una definitiva fissazione» (ivi, 148).

È ovvio, perciò, «che la finzione debba avere una metodologia del tutto diversa da quella dell'ipotesi. La metodologia dell'ipotesi consiste essenzialmente nel fatto che la supposizione non è soltanto pensabile ma è anche di fatto possibile, cosicché tutti i fatti dell'esperienza sono in accordo con essa. Un solo fatto che non si accorda con l'ipotesi può rovesciarla. Nella finzione le cose stanno diversamente» (ivi, 152). Una finzione non può essere rovesciata da alcun fatto. Mentre il principio delle regole metodologiche dell'ipotesi è la plausibilità in base ai fatti dell'esperienza, quello delle regole della finzione è l'utilità, la quale «non determina soltanto l'accettazione o il rifiuto di una singola finzione, ma anche la scelta tra molte» (*ibid.*). Perciò «le regole metodologiche fissate per le ipotesi non si confanno alla finzione» (ivi, 606).

Vi sono due condizioni necessarie affinché un'ipotesi possa essere assunta a spiegazione di un fatto: che essa sia compatibile con la conoscenza esistente e che spieghi quel fatto. Solo quando queste due condizioni sono soddisfatte si può dire che l'ipotesi è un'espressione adeguata della realtà. Infatti la realtà, e solo la realtà, è l'obiettivo di tutte le supposizioni ipotetiche. Alle finzioni, invece, non competono queste due condizioni, che «non si ritrovano affatto in questo caso come si troverebbero invece nel caso delle ipotesi» (*ibid*.).

Che l'ipotesi voglia essere un'espressione adeguata della realtà si vede dal fatto che essa serve a risolvere un problema che è connesso, direttamente o indirettamente, con la realtà, e essa dev'essere compatibile con la conoscenza esistente. Per questo motivo l'ipotesi dev'essere modificata o abbandonata se non permette di risolvere il problema desiderato o è incompatibile con la conoscenza esistente. In tal caso, infatti, essa è in contrasto con la realtà.

Un'altra prova del fatto che l'ipotesi vuol essere un'espressione adeguata della realtà è che essa non fissa l'identità degli oggetti matematici in modo completo e definitivo ma solo in modo parziale e provvisorio, sempre suscettibile di nuovi approfondimenti. Gli approfondimenti nascono dalle interazioni tra l'ipotesi e la conoscenza esistente. Quindi l'identità degli oggetti matematici riceve sempre nuove determinazioni dalle interazioni tra l'ipotesi e la realtà.

5. Il limite del finzionalismo

Il finzionalismo costituisce una valida alternativa alla concezione euristica rispetto al problema della natura degli oggetti matematici?

Certo, esso non è confutato dal primo teorema di incompletezza di Gödel perché, quando si introduce una finzione, non per questo si dà una descrizione completa di tutte le sue proprietà. Che l'ipotesi del continuo non sia né dimostrabile né refutabile in ZFC non è più sorprendente del fatto che affermare che Guildenstern abbia mai detto 'le unghie del piede, d'altra parte, non crescono mai', non è dimostrabile né refutabile nell'*Amleto*.

Tuttavia il finzionalismo è confutato dal secondo teorema di incompletezza di Gödel. Dal punto di vista del finzionalismo, infatti, come i personaggi di un'opera letteraria sono determinati da descrizioni che devono essere coerenti tra loro altrimenti sarebbero finzioni vuote, così gli oggetti matematici sono determinati da assiomi che devono essere coerenti tra loro altrimenti sarebbero finzioni vuote. Perciò, come la coerenza delle descrizioni dei personaggi e delle situazioni è una condizione necessaria per la sensatezza della storia raccontata nell'*Amleto*, così la coerenza degli assiomi di ZFC è una condizione necessaria per la sensatezza della storia raccontata da Zermelo e Fraenkel in ZFC. È vero che la coerenza è una condizione «forse un po' troppo debole» e «forse dobbiamo assumere un po' di più della

coerenza», anche se «non tanto di più» (Field 1980, 19). Ma per il finzionalismo la coerenza, anche se non è una condizione sufficiente, è tuttavia una condizione necessaria, e perciò dev'essere soddisfatta.

Ora, mentre essere sicuri della coerenza delle descrizioni dei personaggi in un'opera letteraria è una condizione che può sempre essere soddisfatta (e in pratica è sempre soddisfatta salvo piccole sviste occasionali), essere sicuri della coerenza degli assiomi è una condizione che, a causa del secondo teorema di incompletezza di Gödel, in linea di principio non può essere soddisfatta per alcun sistema formale appropriato. Perciò il finzionalismo non costituisce una valida alternativa alla concezione euristica rispetto al problema della natura degli oggetti matematici.

PARTE V

LA MATEMATICA E IL MONDO FISICO

41
Oggetti matematici e mondo fisico

1. Il rapporto tra la matematica e il mondo fisico

Fin qui abbiamo considerato la matematica come una disciplina pura, prescindendo dal suo rapporto col mondo fisico. Abbiamo detto, è vero, che tra le situazioni che rendono perplessi e da cui traggono origine i problemi matematici vi sono quelle che nascono dall'indagine del mondo fisico. Ma non abbiamo ancora affrontato alcune fondamentali questioni relative al rapporto tra la matematica e il mondo fisico. Tra esse sono comprese almeno le seguenti.

1) Gli oggetti matematici traggono origine dal mondo fisico?
2) Esiste una stretta corrispondenza tra la matematica e il mondo fisico?
3) Perché la matematica trova applicazione al mondo fisico?
4) La matematica è uno strumento assolutamente efficace per trattare il mondo fisico?
5) Qual è il ruolo della matematica nel mondo fisico?

Tali questioni non possono essere eluse se non si vuol dare un'immagine soltanto parziale della matematica. Questo capitolo e i successivi sono dedicati ad esse.

2. L'astrazione

Consideriamo anzitutto la questione: gli oggetti matematici traggono origine dal mondo fisico? Esaminiamo tre risposte a tale questione.

La prima risposta è quella di Aristotele, secondo cui «il matematico svolge la sua indagine intorno a cose ottenute mediante l'astrazione. Egli, infatti, studia le cose prescindendo da tutti i caratteri sensibili, quali il peso, la leggerezza, la durezza e il suo contrario, e ancora il caldo e il freddo e tutte le altre coppie di contrari che esprimono caratteri sensibili. Il matematico conserva solo la quantità e il continuo, a una, a due o a tre dimensioni, e le proprietà di queste cose in quanto sono appunto quantità e continuo, e non le considera sotto alcun altro aspetto» (Aristotele, *Metaphysica*, K 3, 1061 a 28-35). L'astrazione è dunque l'operazione in base alla quale si considerano soltanto certi caratteri di una cosa e si trascurano tutti gli altri. Mediante essa questi caratteri vengono separati dagli altri, o, più precisamente, vengono pensati come separati dagli altri.

Quindi il matematico studia le stesse cose del fisico, sebbene sotto un aspetto differente. Per esempio, anch'egli studia le forme del sole, della luna, della terra, ma «non in quanto ciascuna di esse costituisce un limite del corpo fisico, né ne esamina le proprietà in quanto queste si predicano di queste realtà. Ed è per questo motivo che egli le separa, perché esse sono, sul piano conoscitivo, separabili dal movimento e, se vengono separate, questo non fa alcuna differenza né si produce alcuna falsità» (Aristotele, *Physica*, B 2, 193 b 32-35). Ciò appare chiaro se cerchiamo di definire gli oggetti fisici e matematici e le loro proprietà, perché allora vediamo che «dispari e pari, retto e curvo, così come numero, linea e figura, sono indipendenti dal movimento, mentre carne, ossa e uomo non lo sono, ma si parla di questi ultimi come quando si parla di 'naso camuso' e non come quando si parla di 'curvo' (ivi, B 2, 194 a 3-7).

In effetti «le cose di cui si parla per astrazione, l'intelletto le pensa come se si pensasse attualmente il camuso non in quanto camuso ma separatamente in quanto concavo: lo si penserebbe senza la carne in cui il concavo si trova. Così gli oggetti matematici, che non sono separati, l'intelletto li pensa separati quando li pensa» (Aristotele, *De Anima*, Γ 8, 432 a 12-17). Essi non esistono separatamente dalla materia, perché «è nelle forme sensibili che esistono gli intelligibili, sia quelli di cui si parla per astrazione», come gli oggetti matematici, «sia le proprietà ed affezioni dei sensibili. Per questo chi non avesse sensazione alcuna non apprenderebbe né comprenderebbe niente» (ivi, Γ 8, 432 a 5-8). Ma, anche se gli oggetti matematici non esistono separatamente dalla materia, grazie all'astrazione noi possiamo considerarli in sé come se fossero separati dalla materia, togliendo da essi tutti i caratteri sensibili e lasciando solo la quantità e la continuità. Così otteniamo le linee, i piani e le aree piane, i solidi e i contenuti solidi. Questi non sono separabili dai corpi a cui ineriscono, «e tuttavia non vengono considerati in quanto affezioni di un determinato corpo ma sono ottenuti per astrazione» (ivi, A 1, 403 b 14-15).

La tesi che il matematico svolge la sua indagine intorno ad oggetti ottenuti dal mondo fisico mediante l'astrazione va, però, incontro ad alcune difficoltà.

1) Mediante l'astrazione si considerano soltanto certi caratteri di cose appartenenti al mondo fisico e si trascurano tutti gli altri, quindi gli oggetti che si ottengono mediante l'astrazione non possono andare oltre l'esperienza sensibile. Ciò non rende conto del fatto che, invece, molti oggetti matematici vanno essenzialmente oltre l'esperienza sensibile, e quindi non possono derivare dal mondo fisico per omissione di alcuni caratteri dei corpi sensibili. Un ovvio esempio è dato dagli insiemi infiniti, che non possono considerarsi ottenuti dal mondo fisico mediante l'astrazione.

2) Mediante l'astrazione non si ottengono oggetti dotati di quell'esattezza che contraddistingue gli oggetti matematici. Per esempio, dallo spigolo di un tavolo non si ottiene mediante l'astrazione la retta, bensì una figura priva di quell'esattezza che contraddistingue la retta. Perciò gli oggetti matematici non possono ottenersi dal mondo fisico mediante l'astrazione, e dunque non si può spiegare l'applicabilità della matematica al mondo fisico semplicemente in base al fatto che gli oggetti matematici si ottengono da esso mediante l'astrazione.

3) Mediante l'astrazione non si ottengono oggetti dotati di quella determinatezza che contraddistingue gli oggetti matematici. Come osserva Frege, supponiamo che «siano seduti davanti a noi, uno accanto all'altro, un gatto nero e uno bianco. Non badiamo al loro colore: essi diventano incolori, restano però ancora vicini. Non badiamo più alla loro postura: essi cessano di sedere, senza tuttavia assumere una diversa postura; ma ciascuno di essi sta ancora al proprio posto. Non badiamo più al loro posto: essi diventano senza posto, ma rimangono sempre ancora ben separati. In questo modo abbiamo forse ottenuto da ciascuno di essi un concetto generale di gatto. Ogni oggetto, con ripetute applicazioni di questo procedimento, si trasforma in un fantasma sempre più esangue. Alla fine così otteniamo da ogni oggetto un qualcosa di completamente evanescente come contenuto; ma il qualcosa ottenuto da un oggetto si distingue tuttavia dal qualcosa ottenuto da un altro oggetto, sebbene non sia facile dire in che modo» (Frege 1990, 181).

4) Mediante l'astrazione non si ottengono oggetti matematici quando i caratteri considerati sono subordinati a quelli trascurati. Per esempio, supponiamo che, considerando due gatti, uno nero e uno bianco, seduti davanti a noi, non badiamo più a ciò che li differenzia da tutte le altre cose: otteniamo così il concetto di due 'qualcosa'. Ma, dal concetto di due 'qualcosa', non badando a 'qualcosa', non otteniamo il concetto di due, perché in queso caso non rimangono più cose di cui si possa dire che ve ne sono due.

5) Mediante l'astrazione si arriva a risultati stravaganti. Come osserva ironicamente Frege, per i sostenitori dell'astrazione trascurare è

un'operazione logica «particolarmente efficace. Badiamo meno ad una proprietà, ed essa scompare. Così, facendo scomparire una nota caratteristica dopo l'altra, otteniamo concetti sempre più astratti» (*ibid.*). Quindi «la disattenzione è una forza logica della più alta efficacia; probabilmente si spiega così la distrazione degli studiosi» (*ibid.*). Nondimeno la disattenzione porta ad assurdità. Per esempio, «se io, astraendo dalla diversità tra la mia casa e quella del mio vicino, volessi considerare tutte e due come la stessa casa, e in base a ciò volessi comandare in casa altrui come nella mia, mi verrebbe ben presto resa chiara la difettosità della mia astrazione» (Frege 1962, II, 107).

Queste difficoltà fanno nascere seri dubbi sulla tesi che il matematico svolge la sua indagine intorno ad oggetti ottenuti dal mondo fisico mediante l'astrazione.

3. L'idealizzazione

Un'altra risposta alla questione se gli oggetti matematici traggano origine dal mondo fisico è quella di Galilei, secondo cui il matematico svolge la sua indagine intorno ad oggetti ottenuti dal mondo fisico mediante l'idealizzazione. Questa è l'operazione attraverso la quale si portano al limite certi caratteri di una cosa. Per esempio, la sfera si ottiene portando al limite alcuni caratteri di una palla. I caratteri risultanti dal portare al limite non appartengono al mondo fisico, dunque l'idealizzazione introduce qualcosa che non si trova in esso. Per esempio, la sfera non si trova nel mondo fisico perché «le sfere materiali son soggette a molti accidenti», e perciò nel mondo fisico è impossibile «trovar una sfera così perfetta, che abbia tutte le linee dal centro alla superficie egualissime» (Galilei 1968, VII, 233). Infatti, «per l'imperfezion della materia quel corpo che dovrebbe esser perfetto sferico, e quel piano che dovrebbe esser perfetto piano, non riescono poi tali in concreto quali altri se li immagina in astratto» (*ibid.*).

Ne segue che l'idealizzazione è essenzialmente diversa dall'astrazione. Mentre mediante quest'ultima si considerano solo certi caratteri di una o più cose appartenenti al mondo fisico e si trascurano tutti gli altri, mediante l'idealizzazione si considerano caratteri che non sono propri di alcuna cosa appartenente al mondo fisico, ma si ottengono portando al limite caratteri di cose appartenenti al mondo fisico. Di conseguenza, mentre gli oggetti matematici ottenuti mediante l'astrazione esistono solo nei corpi sensibili e sono inseparabili da essi, quelli ottenuti mediante l'idealizzazione non esistono nei corpi sensibili.

Poiché i caratteri risultanti dall'idealizzazione non esistono nel mondo fisico, le verità matematiche non riguardano oggetti reali ma solo oggetti ideali. Perché, allora, tali verità sono applicabili al mondo fisico? Secondo Galilei, lo sono perché agli oggetti ideali si può sempre applicare

un'operazione di concretizzazione, che è l'operazione inversa dell'idealizzazione. Essa consiste nell'introdurre un opportuno fattore di correzione per compensare il passaggio al limite da cui hanno tratto origine quegli oggetti ideali, riproducendo così gli oggetti reali. In questo modo le verità matematiche diventano applicabili al mondo fisico con assoluta certezza.

Infatti, «sarebbe ben nuova cosa che i computi e le ragioni fatte in numeri astratti, non rispondessero poi alle monete d'oro e d'argento e alle mercanzie in concreto» (ivi, VII, 234). Per evitare questa conclusione basta osservare che, «sì come a voler che i calcoli tornino sopra i zuccheri, le sete e le lane, bisogna che il computista faccia le sue tare di casse, invoglie ed altre bagaglie, così, quando il filosofo geometra vuol riconoscere in concreto gli effetti dimostrati in astratto, bisogna che difalchi gli impedimenti della materia» (*ibid.*). Per difalcarli, egli deve introdurre un opportuno fattore di correzione, «che se ciò saprà fare», allora «le cose si riscontreranno non meno aggiustamente che i computi aritmetici» (*ibid.*). Introducendo un opportuno fattore di correzione, si potranno applicare le verità matematiche al mondo fisico con assoluta certezza. Gli errori che eventualmente sorgessero dipenderebbero allora solo dal fatto che non si è saputo calcolare il giusto fattore di correzione, «e dunque non consistono né nell'astratto né nel concreto, né nella geometria o nella fisica, ma nel calcolatore, che non sa fare i conti giusti» (*ibid.*).

La tesi che il matematico svolge la sua indagine intorno ad oggetti ottenuti dal mondo fisico mediante l'idealizzazione va però incontro ad alcune difficoltà.

1) Tutte le proposizioni matematiche, sia quelle vere sia quelle false, diventano vuotamente vere nel mondo fisico. Per esempio, la proposizione 'In un cerchio l'angolo al centro è il doppio dell'angolo alla circonferenza' diventa vuotamente vera nel mondo fisico perché ha la forma $P(a) \rightarrow Q(a)$, dove $P(a)$ è la proprietà 'a è un cerchio' e $Q(a)$ è la proprietà 'In a l'angolo al centro è il doppio dell'angolo alla circonferenza'. Ora, $P(a)$ è una condizione idealizzante che è falsa nel mondo fisico perché non è soddisfatta da alcun oggetto fisico, quindi $P(a) \rightarrow Q(a)$ è vuotamente vera nel mondo fisico. Per lo stesso motivo, anche la proposizione opposta 'In un cerchio l'angolo al centro non è il doppio dell'angolo alla circonferenza' diventa vuotamente vera nel mondo fisico perché ha la forma $P(a) \rightarrow \neg Q(a)$. Che tutte le proposizioni matematiche, vere o false, diventino vuotamente vere nel mondo fisico, è una conseguenza imprevista, indesiderata e paradossale della tesi che il matematico svolge la sua indagine intorno ad oggetti ottenuti dal mondo fisico mediante l'idealizzazione.

2) Quando si dice che, introducendo un opportuno fattore di correzione per compensare il passaggio al limite da cui hanno tratto origine gli oggetti ideali, le verità matematiche diventano applicabili al mondo fisico

con assoluta certezza, non si tiene conto del fatto che in generale il fattore di correzione non può essere calcolato con assoluta esattezza. Ma anche se potesse esserlo, ciò non basterebbe per assicurare che le verità matematiche siano applicabili al mondo fisico con assoluta certezza. Infatti, per assicurarlo, occorrerebbe poter determinare con assoluta esattezza anche le condizioni iniziali del sistema. Ma questo in generale è impossibile, e ciò ha le conseguenze che sono state messe in luce dalla teoria del caos.

Queste difficoltà fanno nascere seri dubbi sulla tesi che il matematico svolge la sua indagine intorno ad oggetti ottenuti dal mondo fisico mediante l'idealizzazione.

4. Gli agenti ideali

Un'ulteriore risposta alla questione se gli oggetti matematici traggano origine dal mondo fisico è quella di Kitcher, secondo cui il matematico svolge la sua indagine intorno ad oggetti ottenuti mediante l'idealizzazione non dal mondo fisico, ma dalle operazioni che noi effettuiamo sul mondo fisico. In altri termini, «la matematica consiste di teorie idealizzate dei modi in cui noi possiamo operare sul mondo» (Kitcher 1983, 161). Che gli oggetti matematici si ottengano dalle operazioni che noi effettuiamo sul mondo fisico mediante l'idealizzazione, significa che essi non sono esattamente soddisfatti, ma sono soltanto «approssimativamente soddisfatti, dalle operazioni che noi effettuiamo» (ivi, 110). La necessità di idealizzare tali operazioni deriva dal fatto che, «dati i nostri limiti biologici, le operazioni in cui noi ci impegniamo sono limitate», e non si deve considerare un limite strutturale della matematica il fatto che «non possiamo fare certe cose nell'arco della durata di una vita umana» (ivi, 109).

Invece di dire che gli oggetti matematici si ottengono dalle «operazioni reali di agenti umani reali» sul mondo fisico mediante l'idealizzazione, equivalentemente si può dire che essi si ottengono mediante «operazioni ideali effettuate da agenti ideali» sul mondo fisico, dove la caratteristica fondamentale degli agenti, o soggetti, ideali è la loro «libertà da certi limiti accidentali a cui noi siamo sottoposti» (*ibid.*). La relazione tra le operazioni ideali degli agenti ideali e le operazioni reali degli agenti umani reali «è parallela a quella tra le leggi dei gas ideali e le leggi reali che esistono nel nostro mondo» (*ibid.*). Proprio «come noi facciamo astrazione da alcune delle proprietà accidentali e complicanti dei gas reali per formulare la nozione di gas ideale, così pure noi specifichiamo le capacità dell'agente ideale facendo astrazione dai limiti accidentali della nostra prassi collettiva» (ivi, 117). Dunque «il soggetto ideale è un'idealizzazione di noi stessi» (ivi, 111).

La tesi che il matematico svolge la sua indagine intorno ad oggetti ottenuti mediante operazioni ideali effettuate da agenti ideali sul mondo fisico, va però incontro a difficoltà del tutto simili a quelle a cui va incontro la tesi che egli svolge la sua indagine intorno ad oggetti ottenuti dal mondo

fisico mediante l'idealizzazione. Non solo, ma a tali difficoltà se ne aggiunge un'altra.

Infatti, consideriamo la gerarchia degli insiemi, che, come abbiamo già detto, si ottiene a partire dall'insieme vuoto applicando un numero qualsiasi (transfinito) di volte l'operazione di insieme-potenza, cioè l'operazione mediante la quale si prendono tutti i sottoinsiemi di un insieme. Si potrebbe pensare che gli stadi successivi di formazione di tale gerarchia possano essere visti come gli atti successivi di un agente ideale, per cui la descrizione metaforica in termini di «stadi potrebbe essere considerata come un resoconto letterale dell'attività costruttiva iterata del soggetto matematico ideale» (ivi, 133). Ma ciò presupporrebbe che gli atti successivi di collezionamento dell'agente ideale potessero essere visti come un'idealizzazione degli atti successivi di un agente reale.

Ora, questo è impossibile perché, come osserva Parsons, la formazione della gerarchia degli insiemi «richiede che gli stadi siano considerati come una sorta di 'sovratempo' con una struttura più ricca di quella che può essere rappresentata nel tempo, in base a qualsiasi resoconto intelligibile della costruzione del tempo» (Parsons 1977, 339). La struttura di tale sovratempo dovrebbe essere altamente soprannumerabile, e perciò non potrebbe essere considerata come un'idealizzazione del tempo, se per tale idealizzazione si deve intendere qualcosa che sta al tempo come un gas ideale sta ad un gas reale. Un gas ideale è un gas soggetto a leggi semplici ed eleganti, che in molti casi si possono considerare applicabili a campioni di gas reali. Invece la struttura del sovratempo, a causa della sua soprannumerabilità, non può essere considerata applicabile a campioni di tempo reale.

Addirittura è difficile vedere quale agente ideale, ossia quale mente idealizzata, potrebbe essere adeguata per formare la gerarchia degli insiemi. Una tale mente dovrebbe differire «non solo dalle menti finite, ma anche dalla mente divina quale concepita dalla teologia filosofica, perché o quest'ultima viene pensata come collocata nel tempo, e quindi come operante secondo un ordine che ha la stessa struttura di quello in base a cui operano gli esseri finiti, oppure la sua eternità viene interpretata come la liberazione completa da ogni successione» (*ibid.*).

Perciò sembra ingiustificato dire che non vi sono impedimenti a supporre «che la successione degli stadi in cui si formano gli insiemi è altamente soprannumerabile, che ciascuno degli stadi corrisponde ad un istante di vita del soggetto costruente, e che l'attività del soggetto si svolge in un mezzo analogo al tempo, ma molto più ricco del tempo» (Kitcher 1983, 146).

Parimenti, sembra ingiustificato dire che, supporre questo, significa soltanto «idealizzare un po' di più le nostre azioni strettamente finite», con un atto che in linea di principio non è diverso da quello mediante il quale

nell'idealizzazione «noi facciamo astrazione dalla nostra mortalità o dalla nostra incapacità di passare in rassegna domini infiniti» (ivi, 147).

Infatti, una mente adeguata per formare la gerarchia degli insiemi non potrebbe essere semplicemente un'idealizzazione della mente umana, ottenuta prescindendo dai limiti di quest'ultima e attribuendole le capacità della mente divina. Una tale mente dovrebbe essere qualcosa di essenzialmente diverso tanto dalla mente umana quanto dalla mente divina quale concepita dalla teologia filosofica. Inoltre, l'assunzione dell'esistenza di una tale mente non sembra conciliabile con l'affermazione che, parlare «delle operazioni ideali di un soggetto ideale» non significa «assumere l'esistenza di un essere misterioso dotato di poteri sovrumani» (ivi, 110).

Queste difficoltà fanno nascere seri dubbi sulla tesi che il matematico svolge la sua indagine intorno ad oggetti ottenuti dalle operazioni che noi effettuiamo sul mondo fisico mediante l'idealizzazione.

5. Gli oggetti matematici come ipotesi

In realtà, come abbiamo già detto, gli oggetti matematici non nascono dal mondo fisico mediante l'astrazione, l'idealizzazione o operazioni ideali effettuate da agenti ideali, ma sono ipotesi introdotte per risolvere determinati problemi. Questo non significa che nessun oggetto matematico nasca dal mondo fisico. Significa soltanto che, se un oggetto matematico nasce dal mondo fisico, non nasce da esso mediante tali operazioni bensì, come tutte le altre ipotesi, attraverso inferenze non-deduttive.

Considerando gli oggetti matematici come ipotesi non si va incontro alle difficoltà dell'astrazione, dell'idealizzazione o degli agenti ideali.

In particolare, non si va incontro alla difficoltà dell'astrazione, che gli oggetti che si ottengono mediante essa non possono andare al di là dell'esperienza sensibile e non sono dotati di quell'esattezza che contraddistingue gli oggetti matematici. Infatti le inferenze non-deduttive, anche quando partono da premesse che si basano sull'esperienza sensibile, vanno al di là di essa perché sono ampliative e quindi la loro conclusione non è contenuta nelle premesse. Perciò gli oggetti introdotti mediante le inferenze non-deduttive non si ottengono dagli oggetti fisici semplicemente considerandone alcuni caratteri e trascurando tutti gli altri, ma possono avere proprietà non possedute da essi.

Parimenti, non si va incontro alla difficoltà dell'idealizzazione e degli agenti ideali, che essa non assicura che le verità matematiche siano applicabili al mondo fisico con assoluta certezza, perché non si può calcolare con assoluta esattezza il fattore di correzione richiesto né si possono determinare con assoluta esattezza le condizioni iniziali del sistema. Infatti, quando si considerano gli oggetti matematici come ipotesi, non si pretende che tali ipotesi siano vere, tanto meno che siano applicabili al mondo fisico

con assoluta certezza. Si pretende soltanto che siano plausibili, cioè compatibili con la conoscenza esistente.

42
Il parallelismo e l'applicabilità della matematica

1. Il parallelismo

Consideriamo ora la questione: esiste una stretta corrispondenza tra la matematica e il mondo fisico?

L'idea che una tale corrispondenza esista ha avuto fin dall'antichità innumerevoli sostenitori. Tra questi vi è Hilbert, secondo cui c'è «un importante parallelismo tra natura e pensiero, una fondamentale coincidenza tra esperienza e teoria» (Hilbert 1970, III, 381). Tale parallelismo è espresso dalla matematica, la quale è «lo strumento che produce la mediazione tra teoria e prassi, tra pensiero e osservazione», e «costruisce e via via rafforza il ponte di collegamento» (ivi, III, 385). Infatti, «noi non riusciamo a dominare una teoria scientifica sulla natura finché non abbiamo estratto e totalmente disvelato il suo nucleo matematico» (*ibid.*). La matematica corrisponde strettamente alla natura perché è pensiero sulle cose. E perché mai «il pensiero sulle cose dovrebbe essere tanto diverso da ciò che avviene con le cose, e svolgersi in modo tanto diverso, così lontano dalla realtà tutta?» (Hilbert 1926, 170). Solo ammettendo che il pensiero sulle cose non sia essenzialmente diverso da ciò che avviene con le cose si spiegano «le numerose e sorprendenti analogie, e quell'apparente armonia prestabilita, che il matematico così spesso avverte» (Hilbert 1970, III, 293).

A sostegno della tesi dell'esistenza di un parallelismo tra natura e pensiero espresso dalla matematica, Hilbert adduce quattro argomenti.

1) L'infinito non esiste né nella natura né nel nostro pensiero. Esso, infatti, «non si trova mai realizzato; non esiste nella natura né è ammissibile come fondamento del nostro pensiero razionale» (Hilbert 1931a, 488).

L'infinito non esiste nella natura né nel senso dell'infinitamente grande né in quello dell'infinitamente piccolo. Infatti, da un lato, la geometria ellittica ha fornito «il modello naturale di un universo finito», Einstein con la sua teoria della gravitazione ha affrontato anche le questioni cosmologiche e

ha mostrato «la possibilità di un universo finito», e «tutti i risultati trovati dagli astronomi sono perfettamente compatibili con l'ipotesi che l'universo sia ellittico» (Hilbert 1926, 165). Inoltre nell'universo «non vi è alcuna velocità infinita né alcuna forza o azione propagantesi con una velocità infinita» (Hilbert 1970, III, 380). Dall'altro lato, nella natura non vi è «un continuo omogeneo che ammette una divisibilità illimitata e realizza con ciò l'infinitamente piccolo» (Hilbert 1926, 165). Infatti la materia «è composta di piccoli mattoni, gli atomi», l'elettricità si è rivelata «anch'essa costituita di elettroni positivi e negativi», ed «è stato stabilito che anche l'energia non ammette una divisibilità all'infinito così semplicemente e senza restrizioni: Planck ha scoperto i quanti di energia» (ivi, 164).

L'infinito non esiste neppure nel nostro pensiero, perché questo «è finitario; quando pensiamo, si compie un processo finitario» (Hilbert 1970, III, 187). Nel pensiero l'infinito svolge soltanto il ruolo di un costrutto ideale, di un'astrazione «che può essere fatta solo con l'uso consapevole o inconsapevole del metodo assiomatico» (ivi, III, 380).

2) Tanto la natura quanto il nostro pensiero sono unitari. La natura è unitaria perché noi «osserviamo l'unità della sostanza nella materia e constatiamo ovunque l'unità delle leggi di natura» (ivi, III, 381). Questa unità spesso la «incontriamo in modi tanto sorprendenti» (Hilbert 1931a, 485).

Anche il nostro pensiero «tende all'unità e cerca di costituire l'unità» (Hilbert 1970, III, 381). Specificamente, unitaria è la matematica perché, «malgrado la diversità dei singoli contenuti conoscitivi matematici, scorgiamo pur sempre molto chiaramente l'identità dello strumento logico, l'affinità dei processi costitutivi delle idee nell'intera matematica e le numerose analogie nelle sue diverse discipline» (ivi, III, 329). Inoltre, «quanto più una teoria matematica viene sviluppata, tanto più armoniosamente e unitariamente si configura la sua costruzione», e «così risulta che, con l'estendersi della matematica, il suo carattere unitario non viene perso, ma anzi si manifesta ancor più chiaramente» (*ibid.*). In effetti, «il carattere unitario della matematica affonda le sue radici nella natura intima di questa scienza», cioè nel fatto che «la matematica è il fondamento di ogni esatta conoscenza scientifica della natura» (*ibid.*).

3) Molte teorie matematiche, che erano state formulate originariamente per altri scopi, trovano poi applicazione alla natura. Questo è un fenomeno che può chiamarsi, «in un senso diverso da Leibniz, armonia prestabilita» (*ibid.*).

Il suo esempio più antico è dato dalle leggi di Kepler del moto dei pianeti, per la cui formulazione fu essenziale la teoria delle sezioni coniche, sviluppata da Apollonio di Perga «molto prima che ci si rendesse conto che i nostri pianeti, e persino gli elettroni, si muovono in tali orbite» (*ibid.*). Ma «l'esempio più grandioso e meraviglioso di armonia prestabilita è la celebre teoria della relatività di Einstein» (*ibid.*). In essa certe equazioni covarianti di

condizione, ottenute da Riemann più di mezzo secolo prima in vista di applicazioni a problemi di termodinamica, sono state essenziali per determinare le funzioni che descrivono il campo gravitazionale.

Parimenti, «in epoca più recente è frequente il caso che sono proprio le teorie matematiche più importanti, che stanno al centro dell'interesse dei matematici, ad essere anche necessarie nella fisica» (*ibid.*). Un esempio di ciò è la teoria quantistica, per la quale si è rivelata indispensabile la teoria degli spazi di Hilbert, che questi aveva sviluppato «mosso da un interesse puramente matematico», denominandola «analisi spettrale senza sospettare che un giorno essa sarebbe stata realizzata nello spettro reale della fisica» (*ibid.*).

4) Esistono precondizioni a priori dell'esperienza, senza le quali la matematica e la scienza pura della natura non sarebbero possibili. Ciò è stato messo in luce da Kant, che ha mostrato che la possibilità stessa della matematica e della scienza pura della natura si fonda su certe intuizioni a priori che «si trovano sempre alla base del costituirsi delle nostre conoscenze» e sono le «precondizioni indispensabili del pensiero e dell'esperienza» (ivi, III, 383). L'esistenza di tali precondizioni «rivela i segreti più profondi del nostro problema» (ivi, III, 382). Essa, infatti, mostra che la ragione ultima per cui la matematica può trovare applicazione alla natura è che questa è conoscibile solo sotto le condizioni dello spazio e del tempo, che sono le intuizioni a priori su cui si fonda la possibilità della matematica.

È vero che gli sviluppi della matematica e della fisica hanno mostrato che «dobbiamo tracciare in modo diverso da Kant il confine tra ciò che possediamo a priori e ciò per cui è necessaria l'esperienza», perché «Kant ha largamente sopravvalutato il ruolo e l'estensione dell'a priori» (ivi, III, 383). Nondimeno, «continua ad avere la sua importanza l'idea basilare più generale della gnoseologia kantiana: stabilire quell'impostazione intuitiva a priori e indagare quindi la condizione della possibilità di ogni conoscenza» (Hilbert 1931a, 486).

2. I limiti del parallelismo

La tesi dell'esistenza di un parallelismo tra natura e pensiero espresso dalla matematica va incontro, però, a varie difficoltà.

1) Essa spiega in modo molto semplice perché certe parti della matematica, concepite originariamente per altri scopi, hanno trovato applicazione alla natura, ma non spiega perché altre parti non l'hanno trovata. Questo ripropone il problema: perché certe parti della matematica hanno trovato applicazione alla natura e altre no? La tesi dell'esistenza di un parallelismo tra natura e pensiero espresso dalla matematica non permette di dare una risposta a tale problema.

2) Essa implica che tutta la matematica usata per formulare una teoria fisica deve avere un corrispettivo fisico. Ma ciò si scontra col fatto che la teoria matematica spesso usa concetti e risultati a cui non si può attribuire alcun significato fisico. Tale è il caso, ad esempio, dei concetti e dei risultati della matematica infinitaria. Hilbert riteneva di potersi sbarazzare di questa difficoltà per mezzo del suo programma della conservazione, che avrebbe permesso di dimostrare che i modi inferenziali basati sull'infinito possono essere sostituiti con processi finiti che danno esattamente gli stessi risultati. Ma il programma della conservazione è risultato irrealizzabile a causa dei teoremi di incompletezza di Gödel.

3) Essa implica che noi possiamo spingerci tanto avanti nella conoscenza della natura quanto ci è consentito dal modello matematico. Ma ciò si scontra col fatto che, come mostra la teoria del caos, esistono vari fenomeni fisici per i quali la mancanza di una conoscenza assolutamente esatta delle condizioni iniziali impedisce di effettuare previsioni a lungo termine in base al modello matematico.

4) Essa implica che noi possiamo progredire nella conoscenza della natura solo usando una matematica corretta. Ma ciò si scontra col fatto che spesso i fisici fanno predizioni corrette grazie ad una matematica scorretta e persino incoerente. Per esempio, tutti gli sviluppi della fisica dal Seicento all'Ottocento sono dipesi dall'uso del calcolo infinitesimale di Newton e Leibniz, che si basava su principi non solo incoerenti ma della cui incoerenza si era perfettamente consapevoli. Una prova di ciò è data da un bando dell'Accademia di Berlino, in cui si dichiarava che «l'Accademia spera che si possa spiegare come mai tanti teoremi veri siano stati dedotti da un'ipotesi contraddittoria, e che si possa delineare un principio che sia sicuro, chiaro, in una parola, veramente matematico» (Lagrange 1784, 13). Che l'incoerenza dei principi del calcolo infinitesimale di Newton e Leibniz non abbia impedito ai fisici dal Seicento all'Ottocento di fare predizioni corrette dipende dal fatto che essi supplivano alle deficienze logiche dei principi con la loro esperienza fisica.

5) Essa implica che noi possiamo conoscere la natura usando un'unica teoria matematica. Ma ciò si scontra col fatto che, per trattare gli stessi fenomeni fisici, possiamo usare teorie matematiche differenti. Per esempio, per trattare l'ottica possiamo usare la geometria o il calcolo delle matrici, per trattare la relatività ristretta possiamo usare il calcolo tensoriale o il calcolo vettoriale, per trattare la meccanica quantistica possiamo usare la teoria delle equazioni differenziali o il calcolo delle matrici. L'uso di una teoria matematica piuttosto di un'altra non è solo una questione di gusti ma spesso corrisponde ad una differente visione del mondo. Per esempio, nel caso della meccanica quantistica, la scelta di Schrödinger di usare la teoria delle equazioni differenziali corrispondeva all'idea che la meccanica quantistica dovesse inserirsi nell'ambito di una concezione deterministica del mondo fisico. Invece la scelta di Heisenberg di usare il calcolo delle matrici

corrispondeva all'idea che la meccanica quantistica comportasse il definitivo abbandono della concezione deterministica.

6) Essa implica che noi possiamo conoscere la natura solo in quanto è codificata in linguaggio matematico e noi ne conosciamo la chiave. Ma per decodificare un messaggio non occorre conoscerne la chiave. Infatti, supponiamo che *A* voglia inviare un messaggio a *B* evitando che cada in mani indesiderate. A tale scopo *A* chiude il messaggio in una cassa e applica ad essa un lucchetto. Applicare il lucchetto rappresenta per *A* un modo di codificare il messaggio. Per *B* il modo più ovvio di decodificare il messaggio di *A* sarebbe quello di aprire il lucchetto per mezzo della chiave di *A*. Per fornire a *B* la sua chiave, *A* potrebbe spedire a *B* la cassa e la chiave separatamente, servendosi di due diversi spedizionieri, ma questo non garantirebbe che la chiave non cada in mani indesiderate, perché potrebbe sempre essere rubata. Perciò *A* ricorre ad un altro metodo: spedisce a *B* soltanto la cassa col lucchetto e si tiene la sua chiave. Quando riceve la cassa, *B* applica ad essa un altro lucchetto, in aggiunta a quello di *A*, poi rispedisce la cassa con i due lucchetti ad *A* e si tiene la sua chiave. Quando riceve la cassa, *A* apre il suo lucchetto con la sua chiave e rispedisce a *B* la cassa, che ora è chiusa soltanto col lucchetto di *B*. A questo punto *B* apre tale lucchetto con la sua chiave, e così può accedere al messaggio segreto di *A*. In questo modo *A*, senza fornire a *B* la sua chiave, riesce ad inviare a *B* il suo messaggio segreto evitando che cada in mani indesiderate. La chiave per mezzo della quale *B* decodifica il messaggio di *A* non è la stessa di quella con la quale *A* lo ha codificato.

Queste difficoltà mostrano i limiti della tesi dell'esistenza di un parallelismo tra natura e pensiero espresso dalla matematica.

3. L'applicabilità della matematica

Consideriamo ora la questione: perché la matematica trova applicazione al mondo fisico?

Così posta la questione è ambigua perché sembra dare per scontato che tutta la matematica trovi applicazione al mondo fisico, laddove in realtà solo certe parti la trovano. Perciò la questione dev'essere riformulata nel modo seguente: perché certe parti della matematica trovano applicazione al mondo fisico?

Tale questione non ammette una risposta generale univoca, perché le ragioni per cui questo avviene variano da caso a caso. Nondimeno, a monte delle ragioni specifiche, vi è una ragione di fondo, ossia una fondamentale scelta operata dalla rivoluzione scientifica del Seicento: rinunciare a conoscere l'essenza delle sostanze naturali, contentandosi di conoscerne alcune affezioni tradizionalmente studiate dai matematici, quali il luogo, il moto, la figura, la grandezza.

Che questa sia la ragione di fondo del perché certe parti della matematica trovano applicazione al mondo fisico è qualcosa di cui i protagonisti della rivoluzione scientifica del Seicento erano perfettamente consapevoli.

Per esempio Galilei, di fronte al dilemma: «o noi vogliamo specolando tentar di penetrar l'essenza vera ed intrinseca delle sustanze naturali; o noi vogliamo contentarci di venir in notizia d'alcune loro affezioni», dichiara di scegliere il secondo corno, perché «il tentar l'essenza» l'ha «per impresa non meno impossibile e per fatica non men vana nelle prossime sustanze elementari che nelle remotissime e celesti» (Galilei 1968, V, 187). Se invece «vorremo fermarci nell'apprensione di alcune affezioni», quali «il luogo, il moto, la figura, la grandezza», allora non «par che sia da desperar di poter conseguirle anco ne i corpi lontanissimi da noi, non meno che ne i prossimi, anzi tal una per aventura più esattamente in quelli che in questi» (ivi, V, 188). In questo modo sarà possibile ricondurre i fenomeni della natura a leggi matematiche.

Parimenti Newton dichiara che gli scienziati, «avendo abbandonate le forme sostanziali e le qualità occulte, si sono rivolti a ricondurre i fenomeni della natura a leggi matematiche» (Newton 1972, I, 15).

Finché lo scopo della scienza era quello di penetrare l'essenza delle sostanze naturali, la matematica aveva poche possibilità di trovare applicazione al mondo fisico. Poiché l'essenza era di natura qualitativa, essa non poteva essere trattata mediante la matematica. Per questo motivo nel mondo antico difficilmente si trovano usi essenziali della matematica per formulare leggi di natura.

Ma, con la scelta della rivoluzione scientifica del Seicento di rinunciare a penetrare l'essenza delle sostanze naturali contentandosi di conoscerne alcune affezioni tradizionalmente studiate dai matematici, quali il luogo, il moto, la figura e la grandezza, si è reso possibile usare la matematica per formulare leggi di natura. In virtù di tale scelta il moto, ad esempio, non viene più considerato una qualità di corpi reali, al contrario, i corpi in movimento vengono considerati entità matematiche che si muovono in uno spazio matematico.

Non è dunque per una ragione misteriosa che, a partire dal Seicento, certe parti della matematica hanno trovato applicazione al mondo fisico. È semplicemente una conseguenza della scelta di rinunciare a conoscere l'essenza delle sostanze naturali, contentandosi di conoscerne alcune affezioni del tipo tradizionalmente studiato dai matematici. Perciò non ha senso dire, come fa Wigner, che il fatto che certe parti della matematica trovino applicazione al mondo fisico è qualcosa che confina col misterioso e di cui non vi è alcuna spiegazione razionale. Una tale affermazione è simile a quella di quei pescatori con reti che, dopo aver esaminato la loro pesca, affermassero che la dimensione minima dei pesci nel mare è eguale a quella

delle maglie delle loro reti, e che questo è un fatto che confina col misterioso e di cui non vi è alcuna spiegazione razionale.

4. Leggi matematiche e mondo fisico

La scelta di rinunciare a conoscere l'essenza delle sostanze naturali, contentandosi di conoscerne alcune affezioni, ha permesso agli scienziati di ricondurre i fenomeni della natura a leggi matematiche. Ma questo non significa che la matematica fornisca una descrizione fedele del mondo fisico, e ciò per almeno tre ragioni.

1) La descrizione del mondo fisico data dalla matematica, riguardando soltanto alcune affezioni, non ci dice nulla sull'essenza delle cose.

2) Le leggi matematiche a cui vengono ricondotti i fenomeni della natura esprimono relazioni matematiche tra certe affezioni, relazioni che sono estensionalmente, ma non intensionalmente, eguali alle relazioni fisiche tra tali affezioni. Per esempio, l'equazione di stato dei gas perfetti, $pV = KNT$, esprime una relazione matematica tra le affezioni p (pressione), V (volume), N (numero di molecole) e T (temperatura), in termini di una costante K, e questa relazione matematica è estensionamente, ma non intensionalmente, eguale alla relazione fisica tra tali affezioni. Che ci si debba limitare a tale relazione dipende dal fatto che, sebbene le affezioni p, V, N, T siano relative ad uno stesso gas, esse sono eterogenee tra loro e non disponiamo di concetti fisici capaci di colmarne l'eterogeneità. In mancanza di tali concetti fisici, per collegare tra loro le affezioni p, V, N, T ricorriamo alla matematica, la quale permette di collegarle nella misura in cui possiamo esprimerne i valori mediante numeri reali (il risultato di misurazioni). Però la relazione matematica è estensionalmente, ma non intensionalmente, eguale alla relazione fisica tra le affezioni p, V, N, T. Ciò ha come conseguenza che alle operazioni aritmetiche che occorrono nella relazione matematica $pV = KNT$ non si può attribuire alcun significato fisico, e per questo motivo la validità della relazione matematica non può essere ricondotta a fatti fisici elementari.

3) La descrizione del mondo fisico data dalla matematica non può essere intesa in un senso troppo letterale. Per esempio, secondo la descrizione del moto dei pianeti data dalle leggi di Kepler, l'orbita dei pianeti ha la forma di un'ellisse e può essere calcolata con precisione. Ma questo non è vero letteralmente, perché le orbite dei pianeti somigliano solo approssimativamente ad un'ellisse. Per esempio, l'orbita della Terra sarebbe un'ellisse solo se la Terra fosse l'unico pianeta del sistema solare, fosse una sfera e non avesse alcuno scambio di energia col Sole. Inoltre, noi non sappiamo calcolare con precisione le orbite dei pianeti oltre un certo periodo di tempo. Per esempio, un errore di meno di quindici metri nella misura della posizione della Terra renderebbe impossibile prevederne l'orbita tra cento

milioni di anni. Che la descrizione del mondo fisico data dalla matematica non possa essere intesa in un senso troppo letterale è riconosciuto dallo stesso Hilbert, secondo cui, nell'applicazione della matematica «al mondo dei fenomeni, si richiede sempre una certa dose di buona volontà e di tatto: che ai punti sostituiamo corpi quanto più possibile piccoli, e alle rette sostituiamo corpi quanto più possibile lunghi, per esempio i raggi luminosi ecc.. Così non si dovrà essere troppo pedanti nella verifica delle proposizioni; infatti esse sono solo proposizioni della teoria» (Hilbert 1976, 67-68). Ma questo contraddice la tesi di Hilbert dell'esistenza di uno stretto parallelismo tra natura e pensiero, espresso dalla matematica.

43
L'efficacia della matematica

1. Curve geometriche e curve meccaniche

Che la descrizione del mondo fisico data dalla matematica non possa essere intesa in un senso troppo letterale può servire da introduzione alla prossima questione: la matematica è uno strumento assolutamente efficace per trattare il mondo fisico? A partire dal Seicento sono stati avanzati parecchi dubbi in merito. In seguito esamineremo alcuni di tali dubbi.

Consideriamo anzitutto quelli di Descartes. Egli avanza dubbi sull'efficacia assoluta della matematica come strumento per trattare il mondo fisico in relazione alla questione delle curve meccaniche.

Tale questione nasce dalla distinzione di Descartes tra curve geometriche e curve meccaniche, dove le curve geometriche sono quelle che sono suscettibili di una descrizione matematicamente precisa, mentre le curve meccaniche sono quelle, come la spirale, la quadratrice, la concoide e la cissoide, che non lo sono. Alla base della distinzione tra curve geometriche e curve meccaniche vi è l'idea che si debba intendere «per geometrico ciò che è preciso ed esatto, e per meccanico ciò che non lo è» (Descartes 1996, VI, 389).

Più specificamente, una curva geometrica è una curva che può essere descritta mediante un'equazione algebrica, per la quale cioè «si potrà sempre trovare un'equazione per determinare tutti i suoi punti» (ivi, VI, 395). Tutti i punti di una curva geometrica, «cioè che cadono sotto qualche misura precisa ed esatta, hanno necessariamente qualche rapporto con tutti i punti di una linea retta, che può essere espresso mediante qualche equazione, e in tutto con una sola» (ivi, VI, 392). Una curva meccanica, invece, è una curva che non può essere descritta mediante un'equazione algebrica.

Poiché le curve meccaniche non sono suscettibili di una descrizione matematicamente precisa ed esatta, le curve geometriche sono le uniche che

possono essere usate per modellare matematicamente i fenomeni naturali. D'altra parte, le curve meccaniche «si danno nella natura» (*ibid.*). Pertanto le curve geometriche non sono sufficienti per modellare matematicamente i fenomeni naturali. Ciò fa dubitare che la matematica sia uno strumento assolutamente efficace per trattare tutte le situazioni fisiche.

2. Le corde vibranti

D'Alembert avanza dubbi sull'efficacia assoluta della matematica come strumento per trattare il mondo fisico in relazione al problema delle corde vibranti.

Supponiamo di avere una corda perfettamente flessibile il cui moto, quando essa viene fatta vibrare, ha luogo nel piano *xy*, e tale che ogni punto della corda si muove in linea retta perpendicolarmente all'asse delle *x*. Supponiamo inoltre che lo spostamento *y* della corda in ogni punto sia piccolo rispetto alla lunghezza della corda, che l'angolo tra la corda e l'asse delle *x* sia abbastanza piccolo in ogni punto, e che sulla corda non agiscano forze esterne. Il problema delle corde vibranti è allora: formulare l'equazione del moto della corda in termini dello spostamento *y* come funzione di *x* e del tempo *t*, e risolvere tale equazione dando un'espressione esplicita per *y* come funzione di *x* e *t*.

D'Alembert dà una soluzione di questo problema, formulando l'equazione del moto della corda nella forma $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, e offrendo per essa la soluzione $y(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ dove f e g sono funzioni differenziabili, cioè funzioni che hanno una derivata in ogni punto. La stessa soluzione viene data anche da Euler, ma con un procedimento che, oltre ad essere migliore di quello di d'Alembert, non richiede che le funzioni f e g siano differenziabili. Euler sostiene che l'eliminazione di questa restrizione è essenziale per trattare il caso in cui la corda viene fatta vibrare pizzicandola, e quindi facendole assumere la forma di una V. Nella cuspide della V la funzione è priva di derivata e quindi non è differenziabile. Dunque, per trattare questo caso, è essenziale non limitarsi alle funzioni differenziabili.

Contro questo argomento d'Alembert obietta che, nella cuspide della V, alla funzione non si può attribuire alcun significato. Infatti la derivata di $y(x,t)$ rispetto a *x* è diversa a seconda che la si calcoli per incrementi di *x* positivi o negativi. Perciò la derivata seconda $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ non è definita nella cuspide della V e quindi non ha senso dire, come stabilisce l'equazione del moto della corda, che essa è eguale a $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Di conseguenza «il moto della

corda non può essere sottoposto ad alcun calcolo analitico, né può essere rappresentato da alcuna costruzione, quando la curvatura fa un salto in qualche punto» (d'Alembert 1761-80, I, 22).

D'altra parte una corda pizzicata è una configurazione fisica, e quindi appartiene al mondo fisico. Perciò il fatto che non si possa attribuire alcun significato alla funzione nella cuspide della V fa dubitare che la matematica sia uno strumento assolutamente efficace per trattare tutte le situazioni fisiche.

3. La nozione di funzione

Questi dubbi di Descartes e d'Alembert spesso vengono trattati con sufficienza, perché li si considera come dovuti all'uso di una nozione indebitamente restrittiva di funzione.

Per esempio, Bourbaki afferma che, mano a mano che si è sviluppato il calcolo infinitesimale, ci si è resi sempre più conto che, «a dispetto di Descartes, dal punto di vista 'locale', che è quello del calcolo infinitesimale, le curve e le funzioni algebriche non hanno nulla che le distingua da altre molto più generali; le funzioni e le curve aventi definizioni cinematiche sono funzioni e curve come le altre, accessibili con gli stessi metodi; e la variabile 'tempo' non è che un parametro il cui aspetto temporale è solo una questione di linguaggio» (Bourbaki 1974, 219). Hanno così acquistato diritto di cittadinanza nella matematica «diverse operazioni trascendenti, il logaritmo, l'esponenziale, le funzioni trigonometriche, le quadrature, la risoluzione di equazioni differenziali, il passaggio al limite, la sommatoria delle serie» (ivi, 242). Infine nell'Ottocento è stata introdotta la nozione moderna di funzione.

Secondo Bourbaki, qualche presagio di tale nozione si può trovare già nel Seicento quando «la nozione di 'curva qualsiasi' appare sovente», ma «sfortunatamente quest'idea chiara e feconda, che sarebbe riapparsa nell'Ottocento, allora non poteva lottare contro la confusione creata da Descartes quando questi, in primo luogo, aveva bandito dalla 'geometria' tutte le curve non suscettibili di una definizione analitica precisa, e, in secondo luogo, aveva ristretto alle sole operazioni algebriche i procedimenti di formazione ammissibili in una tale definizione», sebbene, «su quest'ultimo punto, egli non fu seguito dalla maggioranza dei suoi contemporanei» (*ibid.*).

Ora, secondo Bourbaki, le curve meccaniche di Descartes erano funzioni nel senso della nozione moderna di funzione, quindi erano suscettibili di una descrizione matematicamente precisa ed esatta. Perciò l'argomento in base al quale Descartes avanza perplessità circa l'assoluta efficacia della matematica per trattare tutti gli aspetti del mondo fisico è infondato. Lo stesso può dirsi dell'argomento di d'Alembert.

Questa obiezione, però, non è convincente perché Bourbaki assume che ogni fenomeno fisico possa essere descritto da una funzione nel senso

della nozione moderna di funzione. Tale assunzione, però, sembra dubbia. Come osserva Zemanian, «una variabile fisica viene abitualmente considerata come una funzione, ossia come una regola che assegna un numero ad ogni valore numerico di qualche variabile indipendente. Per esempio, se la variabile indipendente è il tempo *t* e la quantità fisica è una forza *f*, allora si direbbe che la forza è nota se è specificato il suo valore $f(t)$ ad ogni istante di tempo *t*. Nondimeno è impossibile osservare i valori istantanei di $f(t)$. Qualsiasi strumento di misura registrerebbe soltanto l'effetto che *f* produce su di esso in un intervallo di tempo non nullo» (Zemanian 1987, 1). Quindi la nozione moderna di funzione non è applicabile ai fenomeni fisici.

Può anche darsi che i dubbi di Descartes e d'Alembert dipendano dall'uso di una nozione indebitamente restrittiva di funzione, ma essi pongono un problema reale, perché la questione se la matematica sia assolutamente efficace per trattare tutte le situazioni fisiche si ripropone anche per la nozione moderna di funzione.

4. Le funzioni analitiche

Hadamard avanza dubbi sull'efficacia assoluta della matematica come strumento per trattare il mondo fisico in relazione alla questione delle funzioni analitiche.

In base al teorema di approssimazione di Weierstrass, «si possono sempre considerare funzioni qualsiasi come analitiche, perché, in caso contrario, esse potrebbero essere approssimate da funzioni analitiche con un grado di precisione a piacere» (Hadamard 1923, 33). Perciò, agli inizi del Novecento, si era diffusa la convinzione che ogni fenomeno fisico potesse essere modellato da una funzione analitica con un'approssimazione a piacere. Per esempio, secondo Poincaré, «una funzione qualsiasi differisce sempre quanto poco si vuole da una funzione discontinua, e nello stesso tempo differisce quanto poco si vuole da una funzione continua. Il fisico può dunque supporre a suo piacere che la funzione studiata sia continua o che essa sia discontinua; che abbia una derivata o che non la abbia; e ciò senza tema di essere mai contraddetto né dall'esperienza attuale né da alcuna esperienza futura» (Poincaré 1970, 113). In particolare, il fisico può supporre che tutte le funzioni da lui usate nei suoi calcoli siano funzioni analitiche.

Contro di ciò Hadamard osserva che le funzioni analitiche non permettono di modellare adeguatamente certi fenomeni fisici. Infatti, sebbene funzioni qualsiasi possano essere approssimate mediante funzioni analitiche con un grado di precisione a piacere, due approssimazioni che differiscono tra loro di pochissimo possono dar luogo a soluzioni completamente differenti della stessa equazione. Dunque, il problema non è se una certa «approssimazione altererebbe molto poco i dati, ma se essa altererebbe molto poco la soluzione» (Hadamard 1923, 33).

Per vedere che due approssimazioni che differiscono tra loro di pochissimo possono dar luogo a soluzioni completamente differenti della stessa equazione, consideriamo, ad esempio, l'equazione bidimensionale del potenziale,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 ,$$

che concerne la distribuzione della temperatura u su una superficie di dimensioni spaziali x e y. Supponiamo di voler trovare una soluzione di questa equazione che, per x=0, soddisfi i seguenti dati iniziali,

$$u(0, y) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = A_n \sin(ny)$$

dove n è un numero molto grande e A_n è una funzione di n che diventa molto piccola quando n diventa grande (per esempio, si può prendere $A_n = \frac{1}{n^p}$). Questi dati iniziali possono essere resi piccoli a piacere. Ma la soluzione dell'equazione è,

$$u = \frac{A_n}{n} \sin(ny)\, \mathrm{Sh}(nx) ,$$

la quale, per $A_n = \frac{1}{n^p}$, è molto grande per qualsiasi valore di x diverso da zero a causa della velocità di crescita del seno iperbolico $\mathrm{Sh}(nx)$. La presenza del fattore $\sin(ny)$ «produce una 'increspatura' della superficie» che, «per quanto impercettibile nelle immediate vicinanze dell'asse delle y, diventa enorme a qualsiasi distanza data da esso, comunque piccola, se l'increspatura è presa sufficientemente sottile prendendo n sufficientemente grande» (ivi, 34).

Questo esempio mostra che dati che differiscono tra loro di pochissimo possono dar luogo ad enormi differenze nel risolvere l'equazione di un dato fenomeno fisico. Perciò, sebbene funzioni qualsiasi possano essere approssimate mediante funzioni analitiche con un grado di precisione a piacere, scegliere un'approssimazione piuttosto che un'altra può dar luogo a soluzioni molto differenti. In particolare, l'equazione del potenziale per le superfici non permette di fare predizioni empiricamente utili, dal momento

che i dati non possono essere misurati con un'accuratezza tale da mantenere la soluzione entro limiti fissati.

Per questo motivo, secondo Hadamard, nella fisica non ci si può limitare a considerare soltanto funzioni analitiche. Invece di assumere che ogni fenomeno fisico possa essere descritto da una funzione analitica con un'approssimazione a piacere, «non assumere l'analiticità dei dati si accorda meglio con la vera e intima natura delle cose» (ivi, 33). D'altra parte ci sono equazioni di fenomeni fisici che ammettono come soluzioni soltanto funzioni analitiche. Ciò fa dubitare che la matematica sia uno strumento assolutamente efficace per trattare tutte le situazioni fisiche.

5. La rinormalizzazione

Vari specialisti di teoria quantistica dei campi avanzano dubbi sull'assoluta efficacia della matematica come strumento per trattare il mondo fisico in relazione alla questione della rinormalizzazione.

Per la teoria quantistica dei campi, nel calcolare il momento magnetico di un elettrone, occorre tener conto della perturbazione prodotta dalla creazione spontanea di particelle e antiparticelle dotate di una carica elettrica nelle vicinanze dell'elettrone. Il calcolo della perturbazione dà luogo ad una serie infinita di potenze S i cui coefficienti sono degli integrali divergenti.

Tale serie è inadatta per qualsiasi calcolo numerico. C'è, però, una procedura, detta rinormalizzazione, che permette di rimpiazzare, per ogni n, i primi n coefficienti con integrali finiti, cioè convergenti. Tale procedura richiede di esprimere grandezze, quali la carica elettrica, con serie di potenze dello stesso tipo, cioè con serie di potenze i cui coefficienti sono anch'essi integrali divergenti. Sostituiamo in S i primi n termini con altri ottenuti in questo modo, ignorando i termini dopo lo n-esimo. Riordinando i termini vediamo che gli integrali divergenti si annullano a vicenda, e quindi che gli integrali rimanenti sono finiti. In teoria si può fare ciò per ogni n, dando così luogo ad una nuova serie infinita di potenze S^* i cui coefficienti sono integrali convergenti.

Ma che cosa significa che gli integrali divergenti si annullano a vicenda? Significa che tutti gli integrali possono essere resi funzione di un limite. Noi integriamo fino ad un limite finito non specificato L, sicché tutti gli integrali diventano funzioni di L. La differenza tra due integrali è eguale all'integrale della differenza. Questi integrali-differenza sono convergenti quando facciamo tendere L all'infinito.

Perché questa procedura sia rigorosa dobbiamo assumere: 1) che esista un limite naturale L^*; e 2) che la serie di potenze infinita S^* ottenuta ripetendo il procedimento per ogni n sia convergente. Ma, per quanto riguarda 1), un limite naturale esisterebbe se esistesse una distanza 'atomica'

minima. Finora, però, nessuno ha proposto una fisica con una distanza atomica minima. E, per quanto riguarda 2), non vi è alcuna prova che S^* sia convergente. Sono convergenti soltanto i coefficienti di S^*, ma questo non assicura che tale sia anche S^*.

Come osserva Steiner, se ne deve concludere che la procedura della rinormalizzazione «non è rigorosa. Infatti, sebbene la sostituzione di grandezze come la carica o la massa con delle serie possa essere giustificata, il resto della procedura, con le sue non suffragate assunzioni del limite e della convergenza, non può esserlo» (Steiner 1992, 165). La procedura della rinormalizzazione è «in realtà pseudo-matematica» (ivi, 166). Nondimeno essa, quando è stata usata per predire il momento magnetico dell'elettrone, ha permesso di ottenere la precisione più stupefacente nella storia della fisica. La precisione è tale che, se si misurasse la distanza tra Los Angeles e New York con la stessa precisione, la misurazione sarebbe esatta a meno dello spessore di un capello umano.

Come si spiega il grande successo della teoria quantistica dei campi rinormalizzata, cioè di «una teoria concettualmente instabile? Di fronte a questo paradosso, un logico ostinato probabilmente rifiuterebbe la teoria della rinormalizzazione o la teoria dei campi (o entrambe), e alcuni fisici, come Dirac, Landau e Chew, lo hanno fatto. Ma molti specialisti di teoria dei campi hanno ragionato diversamente» (Cao-Schweber 1993, 34). Essi non si sono lasciati spaventare dal fatto che la procedura della rinormalizzazione è pseudo-matematica, e hanno continuato a sviluppare la teoria.

Può darsi che un giorno tale pseudo-matematica possa essere rimpiazzata da una matematica rigorosa. Ma, come sottolinea Feynman, per il momento c'è il sospetto «che la rinormalizzazione non sia matematicamente legittima. Quel che è certo è che noi non abbiamo alcun buon modo matematico di descrivere la teoria dell'elettrodinamica quantistica; un tale ammasso di parole» in effetti «non è buona matematica» (Feynman 1985, 129).

La matematica non sa render conto di un procedimento che ha permesso di ottenere la massima precisione predittiva nella storia della fisica. Ciò fa dubitare che essa sia uno strumento assolutamente efficace per trattare tutte le situazioni fisiche.

6. Il caos deterministico

Dubbi sull'efficacia assoluta della matematica come strumento per trattare il mondo fisico nascono anche in relazione alla questione del caos deterministico.

Consideriamo un sistema fisico molto semplice, la cui evoluzione nel corso del tempo è completamente descritta da una successione di stati discreti $x_0, x_1, x_2, \ldots$, e che è deterministico nel senso che, per ogni n,

$x_n = f(x_{n-1})$, dove f è una funzione data. Allora, per ogni n, $x_n = \underbrace{f(f(...f}_{n}(x_0)...))$, cioè l'evoluzione del sistema è completamente determinata dallo stato iniziale x_0 e dalla funzione *f*.

Prendiamo ora come f la funzione decuplo, ossia $x_n = 10 \times x_{n-1}$. Allora, per ogni n, $x_n = 10^n \times x_0$. Questo significa che un errore di misura dello stato iniziale del sistema x_0 viene decuplicato ad ogni stato successivo. Perciò, se si conosce lo stato iniziale del sistema x_0 con precisione fino ad N decimali, si conoscerà lo stato successivo x_1 con precisione fino ad $N-1$ decimali, …, lo stato x_n con precisione fino ad $N-n$ decimali, …, lo stato x_N con precisione fino ad $N-N=0$ decimali. Dunque allo stato x_N si ha una totale perdita di precisione. Il comportamento del sistema diventa assolutamente imprevedibile.

Poiché lo stato iniziale del sistema x_0 può essere conosciuto con una precisione che, per quanto grande, è sempre limitata ad un numero finito N di decimali, ne segue che allo stato x_N la matematica non sarà più in grado di prevedere lo stato del sistema. Ciò fa dubitare che essa sia uno strumento assolutamente efficace per trattare tutte le situazioni fisiche.

7. La ragionevole inefficacia della matematica

Questi esempi mostrano che, alla domanda se la matematica sia uno strumento assolutamente efficace per trattare il mondo fisico, si deve rispondere che vi sono parecchi aspetti del mondo fisico che essa non sa trattare. Perciò invece di parlare, come fa Wigner, dell'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali, si deve parlare piuttosto della sua ragionevole inefficacia.

La matematica sa trattare solo gli aspetti più semplici del mondo fisico. Come osserva Schwartz, essa «è capace di trattare con successo solo le situazioni più semplici, o, più precisamente, una situazione complessa solo nella misura in cui un'eccezionale buona fortuna fa dipendere tale situazione complessa da pochi fattori dominanti semplici. Al di fuori della via più battuta, la matematica perde l'orientamento in una giungla di funzioni speciali senza nome e di impenetrabili particolarità combinatorie. Dunque la tecnica matematica può andare lontano solo se parte da un punto vicino agli elementi essenziali semplici di un problema avente elementi essenziali semplici» (Kac-Rota-Schwartz 1986, 21-22). La «capacità di tenere in mano molti fili, di estrarre un argomento da molti fonti disparate è completamente estranea alla matematica», perciò «la scienza balza in avanti e la matematica le arranca dietro» (ivi, 22).

Poiché la matematica sa trattare solo le situazioni più semplici, o, più precisamente, una situazione complessa solo nella misura in cui dipende da pochi fattori dominanti semplici, con comprensibile opportunismo gli scienziati vanno alla ricerca di tali situazioni e le trattano con successo. Ma questo non cancella il fatto che esistono numerose situazioni complesse che non dipendono da pochi fattori dominanti semplici, che gli scienziati non sanno trattare per mezzo della matematica e che perciò opportunisticamente evitano.

44
La naturalizzazione della matematica

1. Matematica e sopravvivenza

Consideriamo infine la questione: qual è il ruolo della matematica nel mondo fisico?

L'uomo vive in un mondo fisico disordinato e irregolare, non tutti i cui fenomeni sono descrivibili con precisione grande a piacere. Ciò si accorda perfettamente con l'idea che la matematica è soluzione di problemi, perché i problemi nascono da situazioni che rendono perplessi, e le situazioni che rendono più perplessi sono quelle disordinate, irregolari e non precisamente descrivibili. Ma c'è di più: dal carattere disordinato, irregolare e non precisamente descrivibile del mondo fisico dipende l'importanza vitale della matematica. Infatti, proprio per questo suo carattere, il mondo fisico pone l'uomo continuamente di fronte a nuovi problemi, alcuni dei quali sono addirittura essenziali per la sua sopravvivenza, e tra questi ve ne sono alcuni che sono di tipo matematico.

Un esempio elementare di ciò è dato dal fatto che i nostri più antichi progenitori, per sopravvivere, avevano il problema, da un lato, di catturare animali per cibarsene, e, dall'altro lato, di evitare di diventare cibo dei grandi predatori. Per risolvere tale problema essi dovettero affrontarne altri, come quello di riconoscere le forme dei corpi presenti nell'ambiente per poterle classificare in buone, cattive e indifferenti, quello di localizzare la posizione dei corpi presenti nell'ambiente in rapporto al proprio corpo per poter effettuare movimenti di inseguimento o di fuga, o quello di stimare il numero dei corpi presenti nell'ambiente per stabilire il tipo di movimento più opportuno.

Questi problemi erano di tipo matematico. Per esempio, per risolvere il problema di riconoscere le forme dei corpi presenti nell'ambiente per poterle classificare in buone, cattive e indifferenti, o il problema di localizzare la posizione dei corpi in rapporto al proprio corpo, i nostri più

antichi progenitori dovettero fare ipotesi di tipo geometrico. Per risolvere il problema di stimare il numero dei corpi, essi dovettero fare ipotesi di tipo aritmetico. Dunque, lungi dall'essere un'attività separata dal mondo fisico, la matematica affonda le sue radici in esigenze vitali basilari dell'uomo.

2. Ipotesi e adattamento

Questo non sorprende dal momento che la matematica, come del resto tutta la conoscenza, rientra in un processo naturale di adattamento all'ambiente. In tale processo la matematica occupa un posto importante perché, nel corso della storia evolutiva dell'uomo, un passo decisivo verso il conseguimento di capacità cognitive superiori è stato la formulazione di ipotesi sulle forme dei corpi presenti nell'ambiente, sulla loro posizione e sul loro numero, che ha portato l'uomo a scoprire nuove proprietà dell'ambiente e ad orientarsi verso comportamenti più adatti e dotati di maggior successo.

La necessità di formulare ipotesi sull'ambiente è derivata dal fatto che la visione non si riduce ai segnali forniti all'organismo dai recettori sensoriali. Essa è un compito che richiede di attribuire un significato a tali segnali, che in sé sono ambigui e suscettibili di più interpretazioni e solo formulando ipotesi acquistano un significato.

Come ha suggerito originariamente von Helmholtz, le ipotesi in questione sono state formulate mediante inferenze non-deduttive inconsapevoli. Infatti, poiché ciò che vediamo differisce in modo rilevante dall'immagine retinica, nella visione noi inferiamo dai dati forniti dai recettori retinici qualcosa che non è completamente contenuto in essi, perciò lo inferiamo mediante inferenze non-deduttive, perché soltanto queste sono ampliative. Inoltre, tali inferenze non-deduttive sono inconsapevoli, perché nella visione i processi inferenziali hanno luogo troppo velocemente e ad un livello troppo basso per essere accessibili all'introspezione consapevole.

Che la formazione di ipotesi sull'ambiente sia avvenuta mediante inferenze non-deduttive inconsapevoli implica che tali ipotesi sono a priori: a priori non nel senso che sono assolutamente indipendenti dall'esperienza, ma nel senso che non derivano dall'esperienza. Infatti, anche ammesso che le premesse di tali inferenze non-deduttive inconsapevoli derivino dall'esperienza, le loro conclusioni, non essendo contenute nelle premesse, non derivano dall'esperienza. D'altra parte, però, questo non significa che esse siano assolutamente indipendenti dall'esperienza. Infatti, esse si formano attraverso un confronto con l'esperienza e traggono da esso la loro plausibilità.

Dunque le ipotesi sull'ambiente sono a priori in un senso diverso da quello di Kant, per il quale la conoscenza a priori: 1) è assolutamente indipendente dall'esperienza; 2) è vera; 3) è certa. Invece le ipotesi sull'ambiente: 1') non sono assolutamente indipendenti dall'esperienza,

perché sono state formate mediante inferenze non-deduttive a partire dall'esperienza e hanno tratto la loro plausibilità da un confronto con essa; 2') non sono vere ma sono soltanto plausibili, perché sono semplicemente compatibili con l'esperienza; 3') non sono certe, perché sono state trovate mediante inferenze non-deduttive che, essendo ampliative, sono fallibili.

Che le ipotesi sull'ambiente siano state formate mediante inferenze non-deduttive a partire dall'esperienza e abbiano tratto la loro plausibilità da un confronto con essa, implica che quelle ipotesi che non sono sopravvissute a tale confronto sono state eliminate. Tale eliminazione ha costituito un adattamento all'ambiente. In questo senso la matematica, come del resto tutta la conoscenza, rientra in un processo naturale di adattamento all'ambiente.

3. Geometria e adattamento

Che la matematica rientri in un processo naturale di adattamento all'ambiente appare chiaro dalla geometria.

Come sottolinea Poincaré, l'idea di spazio geometrico, in quanto distinta da quella di spazio fisico, non può essere derivata dalle nostre sensazioni, perché «nessuna delle nostre sensazioni, isolata, avrebbe potuto condurci all'idea di spazio» (Poincaré 1968, 83). Per esempio, tale idea non può essere derivata dalle nostre sensazioni visive perché, nel caso di un'impressione puramente visiva dovuta ad un'immagine che si forma sul fondo della retina, anche un'analisi sommaria mostra che quest'immagine ha «due sole dimensioni, e questo distingue già lo spazio geometrico da quello che può dirsi lo spazio visivo puro» (ivi, 78).

Se l'idea di spazio geometrico non può essere derivata dalle nostre sensazioni, essa dev'essere stata formata dalla mente servendosi di elementi preesistenti in essa, e l'esperienza esterna dev'essere stata solo l'occasione per esercitare questa sua capacità. Lo spazio geometrico «è la mente che lo costruisce, ma non lo costruisce con nulla, le occorrono dei materiali e dei modelli. Questi materiali, così come questi modelli, preesistono in essa» (Poincaré 1970, 98). L'esperienza si limita a mostarci «quale scelta si adatta meglio alle proprietà dei nostri corpi» (Poincaré 1968, 107). La necessità di tale scelta dipende dal fatto che, sebbene lo spazio geometrico sia costruito dalla mente, non vi è un modello unico di spazio che si imponga alla mente. Per esempio, la mente può scegliere tra lo spazio tridimensionale e lo spazio quadridimensionale. Di fatto, tra le varie ipotesi sullo spazio, essa ha scelto come spazio più adatto a noi quello tridimensionale, e perciò le nostre associazioni spaziali sono tridimensionali.

Contro la tesi che l'idea di spazio geometrico non possa essere derivata dalle nostre sensazioni, si potrebbe obiettare che, anche se l'esperienza individuale non può aver creato la geometria, questa può essere stata creata dall'esperienza ancestrale, cioè dall'esperienza dei nostri più

antichi progenitori. Essi possono aver tratto l'idea di spazio geometrico dall'esperienza, e questa idea può essere stata poi adottata dalla specie. Tale obiezione, però, è insostenibile perché avrebbe l'assurda conseguenza che, mentre «noi non possiamo dimostrare sperimentalmente il postulato di Euclide» secondo cui per un punto può passare solo una parallela ad una retta data, «i nostri antenati hanno potuto farlo» (ivi, 108). L'esperienza ancestrale ha svolto invece un ruolo differente. Attraverso «la selezione naturale la nostra mente si è adattata alle condizioni del mondo esterno, ha adottato la geometria più vantaggiosa per la specie» (*ibid.*). Ha scelto, cioè, come spazio più adatto a noi, lo spazio tridimensionale.

Tale scelta è stata il risultato di un adattamento della nostra mente «ad un mondo che aveva certe proprietà; e la principale di queste proprietà è che esistono solidi naturali i cui spostamenti avvengono sensibilmente secondo le leggi che chiamiamo leggi del moto dei corpi solidi invariabili» (Poincaré 1999, 100). Se dunque il linguaggio delle tre dimensioni è quello che ci permette di descrivere più facilmente il nostro mondo, è perché esso è modellato sul nostro quadro di associazioni spaziali, e tale quadro «si è formato al fine di poter vivere in questo mondo» (*ibid.*). Si potrebbero anche immaginare esseri pensanti che abbiano un quadro di associazioni spaziali quadridimensionale, ma è dubbio che essi riuscirebbero a vivere nel nostro mondo «e a difendersi dai mille pericoli da cui vi sarebbero assaliti» (*ibid.*).

Scelte come quella di un quadro di associazioni spaziali tridimensionale «non sono conquiste dell'individuo, perché ne vediamo le tracce già nel bambino appena nato: sono conquiste della specie. La selezione naturale ha dovuto portare a queste conquiste tanto più velocemente quanto più esse erano necessarie» (ivi, 91). Esse «devono essere state le prime in ordine temporale, perché senza di esse la difesa dell'organismo sarebbe stata impossibile» (*ibid.*). È vero che, «in questa educazione progressiva che è sfociata nella costruzione dello spazio, è molto difficile determinare quale sia il ruolo dell'individuo e quale il ruolo della specie» (ivi, 101). Noi non sappiamo «in che misura uno di noi, trasportato dalla nascita in un mondo completamente diverso, dove ad esempio vi fossero in prevalenza corpi che si muovono secondo le leggi del movimento dei solidi non-euclidei», potrebbe «rinunciare allo spazio ancestrale per costruire uno spazio completamente nuovo» (*ibid.*). Tuttavia «il ruolo della specie sembra preponderante», ed «è alla specie che noi dobbiamo lo spazio grossolano», ossia «lo spazio degli animali superiori» (*ibid.*).

Non solo la scelta di un quadro di associazioni spaziali tridimensionale è dovuta alla specie, ma essa è incorporata nella nostra organizzazione biologica. Questo si può vedere, ad esempio, dal sistema vestibolare dell'orecchio, una delle cui funzioni essenziali è quella di misurare i movimenti della testa in un sistema di riferimento euclideo. I tre canali semicircolari pieni di un liquido viscoso che compongono il sistema

vestibolare dell'orecchio, sono collocati su tre piani approssimativamente perpendicolari tra loro che costituiscono un sistema di riferimento euclideo. Essi ci fanno conoscere la differenza di pressione del liquido viscoso sulle due estremità di uno stesso canale, e quindi l'accelerazione del movimento di rotazione della testa. Da tale accelerazione noi «deduciamo, mediante un'inferenza inconsapevole, l'orientamento finale della testa, riferito ad un certo orientamento iniziale preso come origine» (Poincaré 1970, 100). Poiché i tre canali semicircolari ci danno informazione sui movimenti da noi eseguiti, la nostra percezione del movimento nello spazio si basa su di essi.

4. Aritmetica ed adattamento

Che la matematica rientri in un processo naturale di adattamento all'ambiente appare chiaro anche dall'aritmetica.

L'idea di numero non può essere derivata dalle nostre sensazioni, altrimenti i bambini non potrebbero afferrare concetti numerici finché non sanno manipolare oggetti, distinguere un gruppo di oggetti dagli altri, esaminarli minuziosamente e ricordare i risultati di tale esame, e questo non avviene prima dei due o tre anni. Invece, i bambini di tre o quattro giorni sanno distinguere due oggetti da tre e, in certe circostanze, anche tre oggetti da quattro. I bambini di quattro mesi e mezzo sanno riconoscere che uno più uno fa due e che due meno uno fa uno, e i bambini appena un po' più grandi sanno riconoscere che due più uno fa tre e che tre meno uno fa due.

Questo smentisce la credenza degli empiristi, come Kitcher, che i bambini formino i concetti numerici basandosi sull'esperienza sensibile, e non possano afferrarli fino a che non sono capaci di riunire oggetti e di separare un gruppo di oggetti da un altro, il che, come abbiamo detto, non avviene prima dei due o tre anni. Secondo Kitcher, i bambini «arrivano ad apprendere il significato di 'insieme', 'numero', 'addizione' e ad accettare le verità basilari dell'aritmetica impegnandosi nelle attività del riunire e del separare» (Kitcher 1983, 107-108). Nello stesso modo i concetti numerici sono stati formati per la prima volta dai nostri più antichi progenitori. Perciò «possiamo considerare le attività dei bambini contemporanei come indicanti i modi in cui i nostri antenati, senza l'aiuto di alcuna autorità, diedero inizio alla tradizione matematica» (ivi, 108 nota). Questa tesi di Kitcher è contraddetta dal fatto che i bambini mostrano capacità numeriche fin dai primi giorni di vita.

Se l'idea di numero non può essere derivata dalle nostre sensazioni, essa dev'essere stata formata dalla mente servendosi di elementi preesistenti in essa, e l'esperienza esterna dev'essere stata solo l'occasione per esercitare questa sua capacità. Il senso del numero non dipende dall'istruzione ma da circuiti del cervello che si sono sviluppati per darci la capacità di riconoscere il numero. Tale capacità dev'essere emersa molto presto se i nostri più antichi

progenitori già la possedevano, come mostrano dipinti e graffiti sulle pareti di caverne, dall'Europa all'Australia, risalenti ad almeno trentamila anni fa.

Secondo Dehaene, che il senso del numero sia già presente nei bambini di pochi giorni si spiega soltanto supponendo che nostro il cervello sia dotato di un modulo specializzato che permette di individuare piccoli numeri «attraverso la maturazione spontanea delle reti neuronali cerebrali, sotto il controllo genetico diretto e con una guida minima da parte dell'ambiente» (Dehaene 1999, 62). Infatti, «è difficile vedere come i bambini potrebbero trarre dall'ambiente abbastanza informazione per apprendere i numeri uno, due e tre in così piccola età. Anche supponendo che l'apprendimento sia possibile prima della nascita o nelle prime ore di vita, durante le quali la stimolazione visiva è spesso quasi nulla, il problema rimane, perché sembra impossibile che un organismo che ignora tutto sui numeri impari a riconoscerli» (ivi, 61-62).

Tale modulo specializzato è un prodotto dell'evoluzione. Nel corso dei millenni, «nel cervello sono sbocciati organi mentali sempre più specializzati per meglio elaborare l'enorme flusso di informazione sensibile ricevuta, e per adattare le reazioni dell'organismo ad un ambiente competitivo e persino ostile. Uno degli organi specializzati mentali del cervello è un primitivo elaboratore numerico che prefigura, senza però proprio eguagliarla, l'aritmetica che è insegnata nelle nostre scuole» (ivi, 4).

Attraverso «l'evoluzione filogenetica, e durante lo sviluppo cerebrale nell'infanzia, la selezione ha operato per assicurare che il cervello costruisse rappresentazioni interne che fossero adattate al mondo esterno. L'aritmetica costituisce un tale adattamento. Alla nostra scala, il mondo è fatto in grandissima parte di oggetti separabili che si combinano in insiemi secondo la familiare equazione 1+1=2. È per questo motivo che l'evoluzione ha ancorato questa regola nei nostri geni. Forse la nostra aritmetica sarebbe stata radicalmente differente se, come i cherubini, ci fossimo evoluti nei cieli, dove una nuvola più un'altra nuvola fanno ancora una nuvola» (ivi, 249).

Naturalmente, per costruire l'aritmetica che viene insegnata nelle scuole, non basta il modulo specializzato, occorre anche la capacità di creare sistemi di simboli, sia parlati che scritti. Solo così è stato possibile nominare infiniti numeri differenti, trattare le quantità continue come se fossero discrete, e inventare regole di calcolo aritmetico. La creazione di sistemi di simboli è un effetto non dell'evoluzione biologica ma dell'evoluzione culturale. Mentre l'evoluzione biologica è lenta e perciò il nostro cervello è rimasto pressoché immutato rispetto a quelli dei nostri più antichi progenitori, l'evoluzione culturale è rapida, e ha portato nel giro degli ultimi millenni alla creazione di sistemi di simboli sempre più evoluti e della matematica quale oggi la conosciamo. Il risultato è che oggi «nella scuola elementare i nostri bambini apprendono la matematica moderna con un cervello progettato inizialmente per la sopravvivenza nella savana africana» (ivi, 6).

Secondo Dehaene, il contrasto tra la lentezza dell'evoluzione biologica e la rapidità dell'evoluzione culturale si spiega solo supponendo che, oltre ad un modulo specializzato per identificare piccoli numeri, il nostro cervello non contenga altre unità specializzate per i numeri e per la matematica. Quando «deve affrontare un compito per il quale non era stato preparato dall'evoluzione, come moltiplicare due cifre, esso recluta una vasta rete di aree cerebrali le cui funzioni iniziali sono completamente differenti, ma che, insieme, possono raggiungere lo scopo desiderato» (*ibid.*). Cioè, il nostro cervello compensa la mancanza di altre unità specializzate per i numeri e per la matematica utilizzando circuiti inizialmente destinati ad un altro scopo. Per questo motivo alcune aree del cervello, che in altri primati sono dedicate al riconoscimento di oggetti visivi, nell'uomo servono ad identificare stringhe di lettere o di cifre.

5. Soluzione di problemi e adattamento

Che la matematica rientri in un processo naturale di adattamento all'ambiente dipende dal fatto che essa risponde ad un profondo bisogno dell'uomo. Questi cerca continuamente di risolvere problemi, anzitutto problemi vitali per la sua sopravvivenza, da quello dei nostri antichi progenitori di procurarsi cibo e di evitare di diventare cibo dei grandi predatori, al problema di evitare i rischi fisici, biologici e sociali del mondo attuale.

Tra i problemi vitali per la sopravvivenza dell'uomo ve ne sono alcuni che sono di tipo matematico, come quello dei nostri antichi progenitori di formulare ipotesi sulle forme dei corpi presenti nell'ambiente, sulla loro posizione o sul loro numero. Tuttavia il ruolo svolto dalla matematica nella sopravvivenza dell'uomo non si limita a tali problemi, ma ne investe altri più complessi. Spesso ci dimentichiamo di questo perché, grazie al controllo che esercitiamo sull'ambiente, dedichiamo solo una piccola parte dei nostri sforzi alla sopravvivenza, impegnandoci per la maggior parte in altre attività. Ciò non toglie che noi esercitiamo il controllo sull'ambiente, e lo perfezioniamo continuamente, con l'aiuto della matematica.

L'offerta di problemi è essenziale per il successo dell'uomo, perché la mancanza di problemi può provocarne la stagnazione. Per l'uomo vivere è porre problemi e formulare ipotesi per la loro soluzione. Attraverso la posizione e la soluzione di problemi egli esce dal rifugio in cui vive abitualmente e va alla ricerca di nuove esperienze, rischiando e cercando situazioni nuove ed estranee. In tal modo, se ha successo, perviene ad un superiore livello di sviluppo.

In questo processo si inserisce la matematica, i cui problemi rispondono a varie esigenze dell'uomo, da quelle più basilari a quelle più complesse e apparentemente più lontane dai bisogni vitali, ma che pure sono funzionali allo scopo di pervenire ad un superiore livello di sviluppo.

Nel tentare di risolvere problemi l'uomo non è isolato, perché tutti gli organismi viventi pongono e cercano continuamente di risolvere problemi. Perciò la matematica, in quanto posizione e soluzione di problemi, non è che la continuazione di attività degli organismi inferiori. Infatti le capacità di distinguere la forma, la posizione e il numero non sono una prerogativa degli uomini ma anche di molte altre forme di vita animale. Tali capacità sono comprese tra quelle grazie alle quali gli uomini e queste altre forme di vita animale formano ipotesi sull'ambiente e perciò sopravvivono. Esse quindi si inseriscono in un processo naturale di adattamento all'ambiente.

Conclusione

In questo libro ho inteso offrire una riflessione sui limiti del punto di vista dominante circa i rapporti tra la filosofia e la matematica, e presentare un punto di vista alternativo. In esso ho sostenuto che la matematica non è costruzione di sistemi di conoscenze assolutamente certe, ma è soluzione incerta di problemi, e non può essere giustificata facendo appello ad un'intuizione infallibile e imperscrutabile, ma dev'essere spiegata basandola su un processo logico di scoperta fallibile e perscrutabile.

L'intuizione infallibile e imperscrutabile è la scappatoia a cui ha fatto ricorso tradizionalmente la filosofia per sottrarsi al compito di fornire un'analisi logica del processo della scoperta. In questo libro ho cercato, invece, di affrontare tale compito proponendo un'analisi logica del processo della scoperta in termini di un metodo fallibile e perscrutabile, come il metodo analitico, e di operazioni fallibili e perscrutabile per trovare le ipotesi, come l'induzione, l'analogia, ecc..

La matematica è una grande impresa razionale, e fare appello all'intuizione per giustificarla non rende giustizia a questo suo carattere. L'appello all'intuizione è proprio di una filosofia incapace di dare una migliore spiegazione di come perveniamo alle ipotesi. In base ad essa, solo postulando l'esistenza di una fonte conoscitiva capace di offrire un'apprensione immediata e infallibile del suo oggetto noi possiamo spiegare come arriviamo alle ipotesi, perché per queste «non esiste alcuna via logica; soltanto l'intuizione, che si fonda su una comprensione empatica dell'esperienza, può arrivare ad esse» (Einstein 1995, 226).

Ma l'intuizione non costituisce una base sufficiente per spiegare come arriviamo alle ipotesi. Perciò, o rinunciamo a spiegarlo e ci rifugiamo nell'irrazionalismo, oppure vogliamo spiegarlo, e allora non possiamo far appello all'intuizione.

L'appello all'intuizione dovrebbe servire, oltre che ad evitare di dare un'analisi logica del processo della scoperta delle ipotesi, a giustificare la certezza della matematica. Infatti, dietro il ricorso all'intuizione, vi è la credenza nell'esistenza di una fonte assoluta di certezza.

In un mondo dominato dalla precarietà e dall'incertezza, è naturale che si senta il bisogno di non far dipendere il proprio giudizio sugli oggetti matematici da inferenze basate su ipotesi mai completamente verificate ma di vederli con l'occhio della mente, così come vediamo gli oggetti fisici con gli occhi del corpo. L'esigenza di una certezza incrollabile e autosufficiente si esprime nella ricerca di un'evidenza diretta e assolutamente credibile, e si manifesta attraverso la pretesa dei matematici che le loro credenze fondamentali siano il risultato di un'esperienza immediata.

Ma l'intuizione non offre, né direttamente né indirettamente, una base sufficiente per giustificare la certezza della matematica. A causa dei risultati di incompletezza di Gödel noi non possiamo tirarci fuori dalla palude dell'incertezza aggrappandoci all'intuizione più di quanto il barone di Münchausen potesse tirarsi fuori dalla palude in cui era sprofondato col suo cavallo aggrappandosi ai propri capelli. Nel nostro mondo dominato dalla precarietà ogni certezza è un inganno. Perciò lo scopo di far appello all'intuizione per giustificare la certezza della matematica viene meno. Ad esso subentra il compito di render conto della matematica così com'è: dubbia, incerta e fallibile come tutte le altre attività umane, eppure così ricca e spesso anche così utile e feconda.

In questo libro ho cercato di assolvere tale compito prendendo la matematica nella sua effettualità, senza i trionfalismi di chi afferma che, «nel segno del metodo assiomatico, la matematica appare chiamata ad avere un ruolo di guida nella scienza in generale» (Hilbert 1970, III, 156). E che «tutta la nostra cultura attuale, nella misura in cui poggia sulla penetrazione intellettuale e sull'asservimento della natura, trova il suo fondamento nella matematica» (ivi, III, 385). La matematica può sentirsi chiamata ad avere un ruolo di guida nella scienza in generale e può pretendere di essere il fondamento di tutta la nostra cultura attuale, ma le altre discipline non sembrano disposte a concederglielo. In ogni caso i trionfalismi sono fuori luogo, perché i limiti della matematica come strumento per conoscere il mondo fisico mostrano che essa non è in grado di trattare tutte le situazioni fisiche, tanto meno di svolgere un ruolo di guida nella scienza e di fondamento di tutta la nostra cultura.

La matematica non ha bisogno di trionfalismi per affermare il suo diritto di esistere. Finché vi sarà curiosità intellettuale essa continuerà ad essere coltivata, e continuerà ad esserlo non perché dia soluzioni assolutamente certe ai problemi che essa pone, ma perché offre risposte dubbie, incerte e fallibili, e tuttavia utili e feconde, a questioni che suscitano l'interesse degli esseri umani, e che spesso sono rilevanti, talora addirittura essenziali, per la vita umana.

Che alcune questioni matematiche possano essere essenziali per la vita umana dipende dal fatto che la matematica rientra in un processo naturale di adattamento all'ambiente. In esso la matematica svolge un ruolo rilevante perché concorre a soddisfare esigenze che si inscrivono nella storia biologica

dell'uomo, e anzi sono determinanti per la sua sopravvivenza. Perciò la matematica non è un mero gioco intellettuale ma è un fenomeno nella storia dell'evoluzione.

Di conseguenza sembra ingiustificato dire che la ragione per cui «la matematica ha attratto la riflessione filosofica a partire da Platone, e da allora la maggior parte dei grandi filosofi ha avuto da dire almeno qualcosa su di essa», non può essere «l'importanza della matematica nella vita umana», perché «l'agricoltura è almeno altrettanto importante, ma non esiste una filosofia dell'agricoltura» (Hart 1996, 1). Il ruolo dell'agricoltura nella vita umana è evidente, e chiarirlo non richiede un'approfondita riflessione. Quello della matematica, invece, è più riposto e problematico, e tuttavia è tangibile. Perciò è naturale che la matematica abbia attratto la riflessione filosofica fin dall'antichità, e che da allora la maggior parte dei grandi filosofi abbia avuto da dire almeno qualcosa su di essa.

References

Achinstein, Peter: 1980, *Discovery and rule-books*, «Revue Internationale de Philosophie», vol. 34, pp. 109-129.

Agazzi, Evandro e Darvas, György (cura): 1997, *Philosophy of mathematics today*, Kluwer, Dordrecht.

Alexandroff, Paul: 1932, *Einfachste Grundbegriffe der Topologie*, Springer-Verlag, Berlin.

Archimede: 1972, *Opera omnia cum commentariis Eutocii*, Iohan Ludvig Heiberg (cura), Teubner, Leipzig (edizione originale 1880-81).

Arnauld, Antoine e Nicole, Pierre: 1981, *La logique ou l'art de penser*, Pierre Clair e François Girbal (cura), Vrin, Paris (edizione originale 1662).

Aschbacher, Michael: 1980-81, *The classification of the finite simple groups*, «The Mathematical Intelligencer», vol. 3, n. 2, pp. 59-65.

Azzouni, Jody: 1994, *Metaphysical myths, mathematical practice. The ontology and epistemology of the exact sciences*, Cambridge University Press, Cambridge.

Azzouni, Jody: 2000, *Stipulation, logic, and ontological independence*, «Philosophia Mathematica», vol. 8, pp. 225-243.

Bacon, Francis: 1961-86, *Works*, James Spedding, Robert Leslie Ellis e Douglas Denon Heath (cura), Frommann Holzboog, Stuttgart-Bad Cannstatt (edizione originale 1858-64).

Barbin, Evelyne e Caveing, Maurice (cura): 1996, *Les philosophes et les mathématiques*, Ellipses, Paris.

Baum, Robert J. (cura): 1973, *Philosophy and mathematics. From Plato to present*, Freeman, Cooper & Co., San Francisco, Ca..

Benacerraf, Paul e Putnam, Hilary (cura): 1983, *Philosophy of mathematics. Selected readings*, Cambridge University Press, Cambridge (edizione originale 1964).

Berkeley, George: 1948-57, *Works*, Arthur Aston Luce e Thomas Edmund Jessop (cura), Thomas Nelson, London.

Bernays, Paul: 1942, *Review of* Steck 1940, «The Journal of Symbolic Logic», vol. 7, pp. 92-93.

Bernoulli, Jakob: 1993, *Briefwechsel*, Birkhäuser, Basel.

Blachowicz, James: 1996, *Ampliative abduction*, «International Studies in the Philosophy of Science», vol. 10, pp. 141-156.

Boole, George: 1958, *An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*, Dover, New York (edizione originale 1854).

Boole, George: 1996, *The mathematical analysis of logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning*, in Ewald 1996, vol. I, pp. 451-509 (edizione originale 1847).

Boolos, George: 1998, *Logic, logic, and logic*, Richard Jeffrey (cura), Harvard University Press, Cambridge, Mass.

Bourbaki, Nicolas: 1949, *Foundations of mathematics for the working mathematician*, «The Journal of Symbolic Logic», vol. 14, pp. 1-8.

Bourbaki, Nicolas: 1960, *Théorie des ensembles*, capp. 1 e 2, Hermann, Paris (edizione originale 1954).

Bourbaki, Nicolas: 1962, *L'architecture des mathématiques. La mathématique, ou les mathématiques?*, in Le Lionnais 1962, pp. 35-47.

Bourbaki, Nicolas: 1974, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris (edizione originale 1960).

Bunge, Mario: 1997, *Moderate mathematical fictionalism*, in Agazzi-Darvas 1997, pp. 51-71.

Butts, Robert E. e Hintikka, Jaakko (cura): 1977, *Logic, foundations of mathematics and computability theory*, Kluwer, Dordrecht.

Cantor, Georg: 1962, *Gesammelte Abhandlungen*, Ernst Zermelo (cura), Olms, Hildesheim (edizione originale 1932).

Cao, Tian Yu e Schweber, Silvan S.: 1993, *The conceptual foundations and the philosophical aspects of renormalization theory*, «Synthese», vol. 97, pp. 33-108.

Carnap, Rudolf: 1999, *Letter to von Neumann, July 11, 1931*, in Mancosu 1999, pp. 41-42.

Cellucci, Carlo: 1998, *Le ragioni della logica*, Laterza, Bari.

Cellucci, Carlo: 2000, *The growth of mathematical knowledge: an open world view*, in Grosholz-Breger 2000, pp. 153-176.

Copi, Irving M.: 1978, *Introduction to logic*, MacMillan, New York (edizione originale 1953).

Curry, Haskell Brooks: 1977, *Foundations of mathematical logic*, Dover, New York (edizione originale 1963).

d'Alembert, Jean-Baptiste: 1761-80, *Opuscules Mathématiques*, David, Paris.

Davis, Philip J.: 1972, *Fidelity in mathematical discourse: is one and one really two ?*, «American Mathematical Monthly», vol. 79, pp. 252-263.

Dedekind, Julius Wilhelm Richard: 1930-32, *Gesammelte mathematische Werke*, Robert Fricke, Emmy Noether e Öystein Ore (cura), Vieweg & Sohn, Braunschweig.

Dehaene, Stanislas: 1999, *The number sense. How the mind creates mathematics*, Penguin Books, London (edizione originale 1997).

Descartes, René: 1996, *Oeuvres*, Charles Adam e Paul Tannery (cura), Vrin, Paris (edizione originale 1897-1913).

Detlefsen, Michael: 1990, *On an alleged refutation of Hilbert's program using Gödel's first incompleteness theorem*, «Journal of Philosophical Logic», vol. 19, pp. 343-377.

Detlefsen, Michael (cura): 1992a, *Proof and knowledge in mathematics*, Routledge, London.

Detlefsen, Michael (cura): 1992b, *Proof, logic and formalization*, Routledge, London.

Dieudonné, Jean: 1960, *Foundations of modern analysis*, Academic Press, New York.

Dieudonné, Jean: 1962, *Les methodes axiomatiques modernes et les fondements des mathematiques*, in Le Lionnais 1962, pp. 543-555.

Dieudonné, Jean: 1988, *Pour l'honneur de l'esprit humain: les mathématiques aujourd'hui*, Hachette, Paris.

Dilthey, Wihelm: 1923- , *Gesammelte Schriften*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

du Bois-Reymond, Emil: 1967, *Über die Grenzen des Naturerkennens*, De Gruyter, Berlin (edizione originale 1872).

Dummett, Michael: 1991, *Frege. Philosophy of Mathematics*, Duckworth, London.

Dummett, Michael: 1993, *The seas of language*, Oxford University Press, Oxford.

Dummett, Michael: 1998, *The philosophy of mathematics*, in Grayling 1998, pp. 122-196.

Dummett, Michael: 2001, *La natura e il futuro della filosofia*, il melangolo, Genova.

Einstein, Albert: 1995, *Ideas and opinions*, Three Rivers Press, New York (edizione originale 1954).

Euler, Leonard: 1915-44, *Commentationes Arithmeticae*, Ferdinand Rudio (cura), Teubner, Leipzig.

Ewald, William (cura): 1996, *From Kant to Hilbert. A source book in the foundations of mathematics*, Oxford University Press, Oxford.

Feferman, Solomon: 1998, *In the light of logic*, Oxford University Press, Oxford.

Feferman, Solomon: 2000, *Mathematical intuition vs. mathematical monsters*, «Synthese», vol. 125, pp. 317-332.

Fenstad, Jens Erik (cura): 1971, *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, North-Holland, Amsterdam.

Feynman, Richard Phillips: 1985, *QED. The strange theory of light and matter*, Princeton University Press, Princeton.

Field, Hartry: 1980, *Science without numbers*, Blackwell, Oxford.
Field, Hartry: 1989, *Realism, mathematics and modality*, Blackwell, Oxford.
Franklin, James: 1987, *Non-deductive logic*, «The British Journal for the Philosophy of Science», vol. 38, pp. 1-18.
Franks, John: 1989a, *Review of* Gleick 1987, «The Mathematical Intelligencer», vol. 11, n. 1, pp. 65-69.
Franks, John: 1989b, *Comments on the responses to my review of* Chaos, «The Mathematical Intelligencer», vol. 11, n. 3, pp. 12-13.
Frege, Gottlob: 1962, *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*, Olms, Hildesheim (edizione originale 1893-1903).
Frege, Gottlob: 1964, *Begriffsschrift und andere aufsätze*, Ignacio Angelelli (cura), Olms, Hildesheim.
Frege, Gottlob: 1976, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Gottfried Gabriel, Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Christian Thiel e Albert Veraart (cura), Felix Meiner, Hamburg.
Frege, Gottlob: 1988, *Die Grundlagen der Arithmetik*, Felix Meiner, Hamburg (edizione originale 1884).
Frege, Gottlob: 1990, *Kleine Schriften*, Ignacio Angelelli (cura), Olms, Hildesheim (edizione originale 1967).
Galilei, Galileo: 1968, *Opere*, Antonio Favaro (cura), Barbera, Firenze (edizione originale 1890-1909).
George, Alexander e Velleman, Daniel J.: 2002, *Philosophies of mathematics*, Blackwell, Oxford.
Giaquinto, Marcus: 2002, *The search for certainty. A philosophical account of foundations of mathematics*, Oxford University Press, Oxford.
Gillies, Donald (cura): 1992, *Revolutions in mathematics*, Oxford University Press, Oxford.
Gillies, Donald: 1999, *Review of* Cellucci 1998, «Philosophia Mathematica», vol. 7, pp. 213-222.
Girard, Jean-Yves: 1989, *Le champ du signe ou la faillite du réductionnisme*, in Nagel-Newman-Gödel-Girard 1989, pp. 147-171.
Giusti, Enrico: 1999, *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*, Bollati Boringhieri, Torino.
Gleick, James: 1987, *Chaos. Making a new science*, Viking Penguin, New York.
Gödel, Kurt: 1986- , *Collected works*, Solomon Feferman coadiuvato da John William Dawson, Stephen Cole Kleene, Gregory H. Moore, Robert M. Solovay, Jean van Heijenoort (cura), Oxford University Press, Oxford.
Grayling, Anthony C. (cura): 1998, *Philosophy 2. Further through the subject*, Oxford University Press, Oxford.
Grosholz, Emily R.: 1992, *Was Leibniz a mathematical revolutionary?*, in Gillies 1992, pp. 117-133.

Grosholz, Emily R.: 2000, *The partial unification of domains, hybrids, and the growth of mathematical knowledge*, in Grosholz-Breger 2000, pp. 81-91.

Grosholz, Emily R. e Breger, Herbert (cura): 2000, *The growth of mathematical knowledge*, Kluwer, Dordrecht.

Hadamard, Jacques: 1923, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*, Yale University Press, New Haven.

Hadamard, Jacques: 1945, *The psychology of invention in the mathematical field*, Princeton University Press, Princeton.

Hahn, Hans: 1980, *Empiricism, logic and mathematics. Philosophical papers*, Brian McGuinness (cura), Kluwer, Dordrecht.

Halmos, Paul: 1968, *Mathematics as a creative art*, «American Scientist», vol. 56, p. 380.

Hamming, Richard Wesley: 1980, *The unreasonable effectiveness of mathematics*, «The American Mathematical Monthly», vol. 87, pp. 81-90.

Hart, Wilbur Dyre (cura): 1996, *The philosophy of mathematics*, Oxford University Press, Oxford.

Hermite, Charles e Stieltjes, Thomas Jan: 1905, *Correspondance*, Gauthier-Villars, Paris.

Hersh, Reuben: 1997, *What is mathematics, really?*, Oxford University Press, Oxford.

Hilbert, David: 1900, *Über den Zahlbegriff*, «Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung», vol. 8, pp. 180-184.

Hilbert, David: 1902-3, *Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck*, «Proceedings of the London Mathematical Society», vol. 35, pp. 50-68.

Hilbert, David: 1905a, *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*, in *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 17. August 1904*, Teubner, Leipzig, pp. 174-185.

Hilbert, David: 1905b, *Logische Principien des mathematischen Denkens*, Ernst Hellinger (cura), Mathematisches Institut, Georg-August Universität, Göttingen.

Hilbert, David: 1922-23, *Wissen und mathematisches Denken*, Wilhelm Ackermann (cura), Mathematisches Institut, Georg-August Universität, Göttingen.

Hilbert, David: 1926, *Über das Unendliche*, «Mathematische Annalen», vol. 95, pp. 161-190.

Hilbert, David: 1928, *Die Grundlagen der Mathematik*, «Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität», vol. 6, pp. 65-85.

Hilbert, David: 1929, *Probleme der Grundlegung der Mathematik*, «Mathematische Annalen», vol. 102, pp. 1-9.

Hilbert, David: 1931a, *Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre*, «Mathematische Annalen», vol. 104, pp. 485-494.

Hilbert, David: 1931b, *Beweis des Tertium non datur*, «Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse», pp. 120-125.

Hilbert, David: 1932, *Geleitwort*, in Alexandroff 1932, p. *v*.

Hilbert, David: 1962, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Stuttgart (edizione originale 1899).

Hilbert, David: 1970, *Gesammelte Abhandlungen*, Springer-Verlag, Berlin (edizione originale 1932-35).

Hilbert, David: 1976, *Wissenschaftlicher Briefwechsel mit Frege,* in Frege 1976, pp. 55-80.

Hilbert, David: 1992, *Natur und mathematisches Erkennen*, Birkhäuser, Basel.

Hilbert, David e Ackermann, Wilhelm: 1928, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer-Verlag, Berlin.

Hilbert, David e Bernays, Paul: 1968-70, *Grundlagen der Mathematik I-II*, Springer-Verlag, Berlin (edizione originale 1934-1939).

Hilbert, David e Cohn-Vossen, Stefan: 1932, *Anschauliche Geometrie*, Springer-Verlag, Berlin.

Hintikka, Jaakko: 1973, *Logic, language-games and information*, Oxford University Press, Oxford.

Hintikka, Jaakko: 1985, *True and false logics of scientific discovery*, in Hintikka-Vandamme 1985, pp. 3-14.

Hintikka, Jaakko: 1996, *The principles of mathematics revisited*, Cambridge University Press, Cambridge.

Hintikka, Jaakko: 2000, *On Gödel*, Wadsworth, Belmont, CA..

Hintikka, Jaakko e Vandamme, Fernand (cura): 1985, *Logic of discovey and logic of discourse*, Plenum Press, New York.

Hume, David: 1975, *Enquiries concerning human understanding and concerning the principles of morals*, Lewis Amherst Selby-Bigge e Peter Harold Nidditch (cura), Oxford University Press, Oxford (edizione originale 1902).

Hume, David: 1978, *A Treatise of human nature*, Lewis Amherst Selby-Bigge e Peter Harold Nidditch (cura), Oxford University Press, Oxford (edizione originale 1888).

Jacquette, Dale (cura): 2002, *Philosophy of mathematics. An anthology*, Blackwell, Oxford.

Jaffe, Arthur: 1997, *Proof and the evolution of mathematics*, «Synthese», vol. 111, pp. 133-146.

Jevons, William Stanley: 1877, *The principles of science. A treatise on logic and scientific method*, MacMillan, London (edizione originale 1874).

Kac, Mark, Rota, Gian-Carlo e Schwartz, Jacob T.: 1986, *Discrete thoughts. Essays on mathematics, science, and philosophy*, Birkhäuser, Boston.

Kant, Immanuel: 1900- , *Gesammelte Schriften*, Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, Berlin.

Kant, Immanuel: 1998, *Logik-Vorlesung. Unveröffentlichte Nachschriften I-II*, Tillmann Pinder (cura), Meiner, Hamburg.

Kapitan, Tomis: 1990, *In what way is abductive inference creative?*, «Transactions of the Charles S. Peirce Society», vol. 26, pp. 499-512.

Kapp, Ernst: 1967, *Greek foundations of traditional logic*, AMS Press, New York (edizione originale 1942).

Kepler, Johannes: 1938- , *Gesammelte Werke*, Max Caspar (cura), Beck, Munich.

Keynes, John Maynard: 1948, *A treatise on probability*, Macmillan, London (edizione originale 1921).

Kitcher, Philip: 1983, *The nature of mathematical knowledge*, Oxford University Press, Oxford.

Knorr, Wilbur Richard: 1993, *The ancient tradition of geometric problems*, Dover, New York (edizione originale 1986).

Kordig, Carl R.: 1978, *Discovery and justification*, «Philosophy of Science», vol. 45, pp. 110-117.

Körner, Stephan: 1960, *The philosophy of mathematics*, Hutchinson, London.

Kreisel, Georg: 1967, *Mathematical logic: what has it done for the philosophy of mathematics?*, in Schoenman 1967, pp. 201-272.

Kreisel, Georg: 1984, *Frege's foundations and intuitionistic logic*, «The Monist», vol. 67, pp. 72-91.

Kreisel, Georg e MacIntyre, Angus: 1982, *Constructive logic versus algebraization I*, in Anne Sjerp Troelstra e Dirk van Dalen 1982, pp. 217-260.

Lagrange, Joseph-Louis: 1784, *Prix proposés par l'Academie Royale des Sciences et Belles-Lettres pour l'année 1786*, «Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin», vol. 15, Decker, Berlin.

Lakatos, Imre: 1976, *Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery*, John Worrall e Elie Zahar (cura), Cambridge University Press, Cambridge.

Lakoff, George e Núñez, Rafael E.: 2000, *Where mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being*, Basic Books, New York, NY.

Lam, Clement W.H.: 1990, *How reliable is a computer-based proof?*, «The Mathematical Intelligencer», vol. 12, n. 1, pp. 8-12.

Lang, Serge: 1985, *The beauty of doing mathematics. Three public dialogues*, Springer-Verlag, Berlin.

Laplace, Pierre Simon: 1878-1912, *Oeuvres Complètes*, Gauthier-Villars, Paris.

Laugwitz, Detlef: 2000, *Controversies about numbers and functions*, in Grosholz-Breger 2000, pp. 177-198.

Leary, Christopher C.: 2000, *A friendly introduction to mathematical logic*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Leibniz, Gottfried Wilhelm: 1965, *Die philosophischen Schriften*, Carl Immanuel Gerhardt (cura), Olms, Hildesheim (edizione originale 1875-90).

Leibniz, Gottfried Wilhelm: 1966, *Handschriften der Königlichen öffentlichen Bibliotek zu Hanover*, Eduard Bodemann (cura), Olms, Hildesheim (edizione originale 1895).

Leibniz, Gottfried Wilhelm: 1969, *Philosophical papers and letters*, Leroy E. Loemker (cura), Kluwer, Dordrecht.

Leibniz, Gottfried Wilhelm: 1971, *Mathematische Schriften*, Carl Immanuel Gerhardt (cura), Olms, Hildesheim (edizione originale 1849-63).

Le Lionnais, François (cura): 1962, *Les grands courants de la pensée mathématique*, Blanchard, Paris (edizione originale 1948).

Littlewood, John Edensor: 1953, *A mathematician's miscellany*, Methuen, London.

Lobačevskij, Nikolaj Ivanovič: 1946-1951, *Polnoe sobranie socinenij*, V.F. Kagan (cura), Gos. izd-vo tekhn.-teoret. lit-ry, Moskva.

Locke, John: 1975, *An essay concerning human understanding*, Peter H. Nidditch (cura), Oxford University Press, Oxford (edizione originale 1690).

Łukasiewicz, Jan: 1970, *Selected works*, Ludwig Borkowski (cura), North-Holland, Amsterdam.

Machover, Moshé: 1996, *Set theory, logic and their limitations*, Cambridge University Press, Cambridge.

Mac Lane, Saunders: 1981, *Mathematical models: a sketch for the philosophy of mathematics*, «The American Mathematical Monthly», vol. 88, pp. 462-472.

Mac Lane, Saunders: 1986, *Mathematics. Form and function*, Springer-Verlag, Berlin.

Maddy, Penelope: 1992, *Realism in mathematics*, Oxford University Press, Oxford (edizione originale 1990).

Maddy, Penelope: 1997, *Naturalism in mathematics*, Oxford University Press, Oxford.

Maddy, Penelope: 2000, *Mathematical progress*, in Grosholz-Breger 2000, pp. 341-352.

Mancosu, Paolo (cura): 1998, *From Brouwer to Hilbert. The debate on the foundations of mathematics in the 1920s*, Oxford University Press, Oxford.

Mancosu, Paolo: 1999: *Between Vienna and Berlin: the immediate reception of Gödel's incompleteness theorems*, «History and Philosophy of Mathematics», vol. 20, pp. 33-45.

Mayberry, John: 1994, *What is required of a foundation for mathematics?*, «Philosophia Mathematica», vol. 2, pp. 16-35.

McCarthy, T.G.: 1994, *Self-reference and incompleteness in a non-monotonic setting*, «Journal of Philosophical Logic», vol. 23, pp. 423-449.

Mill, John Stuart: 1963-86, *Collected works*, John M. Robson (cura), University of Toronto Press, Toronto.

Monk, James Donald: 1976, *Mathematical logic*, Springer-Verlag, Berlin.

Muggleton, Stephen e de Raedt, Luc: 1994, *Inductive logic programming: theory and methods*, «Journal of Logic Programming», vol. 19/20, pp. 629-679.

Nagel, Ernest, Newman, James R., Gödel, Kurt e Girard, Jean-Yves: 1989, *Le théorème de Gödel*, Editions du Seuil, Paris.

Natorp, Paul: 1923, *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*, Teubner, Leipzig.

Newton, Isaac: 1972, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Alexandre Koyré e I. Bernard Cohen (cura), Cambridge University Press, Cambridge.

Novalis (von Hardenberg, Friedrich): 1965, *Das philosophische Werk I*, in *Schriften*, Richard Samuel, Hans-Joachim Mähl e Gerhard Schulz (cura), vol. 2, Kolhammer Verlag, Stuttgart.

Novalis (von Hardenberg, Friedrich): 1968, *Das philosophische Werk II*, in *Schriften*, Richard Samuel, Hans-Joachim Mähl e Gerhard Schulz (cura), vol. 3, Kolhammer Verlag, Stuttgart.

Odifreddi, Piergiorgio: 2001, *C'era una volta un paradosso. Storie di illusioni e verità rovesciate*, Einaudi, Torino.

Pappus Alexandrinus: 1965, *Collectio Mathematica*, Friedrich Hultsch (cura), Hakkert, Amsterdam (edizione originale 1876-77).

Parsons, Charles: 1977, *What is the iterative conception of set?*, in Butts-Hintikka 1977, pp. 335-367.

Peirce, Charles Sanders: 1931-58, *Collected papers*, Charles Hartshorne e Paul Weiss (cura), Harvard University Press, Cambridge, Mass.

Peirce, Charles Sanders: 1992, *Reasoning and the logic of things*, Kenneth Laine Ketner (cura), Harvard University Press, Cambridge, Mass.

Pieri, Mario: 1980, *Opere sui fondamenti della matematica*, Cremonese, Roma.

Poincaré, Henri: 1968, *La science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris (edizione originale 1902).

Poincaré, Henri: 1970, *La valeur de la science*, Flammarion, Paris (edizione originale 1905).

Poincaré, Henri: 1999, *Science et méthode*, Kimé, Paris (edizione originale 1908).

Pólya, George: 1945, *How to solve it. A new aspect of mathematical method*, Penguin Books, London (edizione originale 1945).

Pólya, George: 1954, *Mathematics and plausible reasoning*, Princeton University Press, Princeton.

Pólya, George: 1962, *Mathematical discovery*, Wiley, New York.

Popper, Karl Raimund: 1972, *Conjectures and refutations*, Routledge, London.

Popper, Karl Raimund: 1974, *Replies to my critics*, in Schilpp 1974, vol. II, pp. 961-1197.

Prawitz, Dag: 1971, *Ideas and results in proof theory*, in Fenstad 1971, pp. 235-307.

Prawitz, Dag: 1998, *Comments on the papers*, «Theoria», vol. 64, pp. 283-337.

Proclus Diadochus: 1992, *In Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii*, Gottfried Friedlein (cura), Olms, Hildesheim (edizione originale 1873).

Reichenbach, Hans: 1951, *The rise of scientific philosophy*, University of California Press, Berkeley-Los Angeles.

Robinson, Richard: 1936, *Analysis in Greek geometry*, «Mind», vol. 45, pp. 464-473.

Rota, Gian-Carlo: 1997, *Indiscrete thoughts*, Birkhäuser, Boston.

Russell, Bertrand: 1994, *Mysticism and logic*, Routledge, London (edizione originale 1918).

Russell, Bertrand: 1999, *Our knowledge of the external world*, Routledge, London (edizione originale 1914).

Salmon, Wesley C.: 1967, *The foundations of scientific inference*, University of Pittsburgh Press, Pittsburgh.

Schilpp, Paul Arthur (cura): 1974, *The philosophy of Karl Popper*, Open Court, La Salle.

Schoenman, Ralph (cura): 1967, *Bertrand Russell, philosopher of the century*, Allen & Unwin, London.

Schopenhauer, Arthur: 1960, *Sämtliche Werke*, Wolfgang Freiherr von Löhneysen (cura), Cotta-Insel, Stuttgart-Frankfurt a.M..

Senechal, M.: 1998, *The continuing silence of Bourbaki. An interview with Pierre Cartier*, «The Mathematical Intelligencer», vol. 20, n. 1, pp. 22-28.

Shapiro, Stewart: 1989, *Structure and ontology*, «Philosophical Topics», vol. 17, pp. 145-171.

Shapiro, Stewart: 2000, *Thinking about mathematics. The philosophy of mathematics*, Oxford University Press, Oxford.

Simon, Herbert Alexander: 1977, *Models of discovery*, Kluwer, Dordrecht.

Simpson, Stephen George: 1988, *Partial realizations of Hilbert's program*, «The Journal of Symbolic Logic», vol. 53, pp. 349-363.

Simpson, Stephen George: 1999, *Subsystems of second order arithmetic*, Springer-Verlag, Berlin.

Steck, Max: 1940, *Ein unbekannter Brief von Gottlob Frege über Hilberts erste Vorlesung über die Grundlagen der Geometrie*, «Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften», N. 6, pp. 8.

Steiner, Mark: 1992, *Mathematical rigor in physics*, in Detlefsen 1992a, pp. 158-170.

Stone, Marshall: 1961, *The revolution in mathematics*, «The American Mathematical Monthly», vol. 68, pp. 715-734.

Suppes, Patrick: 1957, *Introduction to logic*, Van Nostrand, Princeton.

Szabó, Árpád: 1969, *Anfänge der Griechischen Mathematik*, Akadémiai Kiadó, Budapest.

Takeuti, Gaisi: 1987, *Proof theory*, North-Holland, Amsterdam (edizione originale 1975).

Tragesser, Robert S.: 1992, *Three insufficiently attended to aspects of most mathematical proofs: phenomenological studies*, in Detlefsen 1992b, pp. 162-198.

Troelstra, Anne Sjerp e van Dalen, Dirk (cura): 1982, *The L.E.J. Brouwer Centenary Colloquium*, North-Holland, Amsterdam.

Turing, Alan: 1939, *Systems of logic based on ordinals*, «Proceedings of the London Mathematical Society», vol. 45, pp. 161-228.

Tymoczko, Thomas: 1998, *New directions in the philosophy of mathematics*, Princeton University Press, Princeton (edizione originale 1986).

Vaihinger, Hans: 1927, *Die Philosophie des Als Ob*, Felix Meiner, Leipzig (edizione originale 1911).

Vailati, Giovanni: 1987, *Scritti*, Mario Quaranta (cura), Arnaldo Forni, Bologna.

van Heijenoort, Jean (cura): 1977, *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge, Mass. (edizione originale 1967).

von Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand: 1896, *Handbuch der physiologischen Optik*, Voss, Leipzig (edizione originale, 1867).

von Neumann, John: 1999, *Letter to Carnap, June 6, 1931*, in Mancosu 1999, pp. 39-41.

Wagner, Steven: 1982, *Arithmetical fiction*, «Pacific Philosophical Quarterly», vol. 63, pp. 255-269.

Whitehead, Alfred North e Russell, Bertrand: 1925-27, *Principia mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge (edizione originale 1910-13).

Wigner, Eugene P.: 1960, *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*, «Communications on Pure and Applied Mathematics», vol. 13, pp. 1-14.

Williams, Hugh C.: 1982, *The influence of computers in the development of number theory*, «Computing & Mathematics with Applications», vol. 8, n. 2, pp. 75-93.

Wittgenstein, Ludwig: 1978, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, Blackwell, Oxford (edizione originale 1956).

Worrall, John e Zahar, Elie: 1976, *Editors' note*, in Lakatos 1976, pp. 56-57.

Zemanian, Armen H.: 1987, *Distribution theory and transform analysis*, Dover, New York (edizione originale 1965).

Zermelo, Ernst: 1908, *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*, «Mathematische Annalen», vol. 65, pp. 107-128.

Indice dei nomi

Achinstein, Peter,
Ackermann, Wilhelm,
Adam, Charles,
Agazzi, Evandro,
Alexandroff, Paul,
Angelelli, Ignacio,
Apellicone,
Apollonio di Perga,
Appel, Kenneth,
Archimede,
Aristotele,
Arnauld, Antoine,
Aschbacher, Michael,
Azzouni, Jody,

Bacon, Francis,
Banach, Stefan,
Barbin, Evelyne,
Baum, Robert J.,
Bayes, Thomas,
Benacerraf, Paul,
Berkeley, George,
Bernays, Paul,
Bernoulli, Jakob,
Beth, Evert Willem,
Blachowicz, James,
Bodemann, Eduard,
Boole, George,
Boolos, George,
Borkowski, Ludwig,
Bourbaki, Nicolas,

Breger, Herbert,
Brouwer, Luitzen Egbertus Jan,
Bunge, Mario,
Bunsen, Robert Wilhelm von,
Burnside, William S.,
Butts, Robert E.,

Cantor, Georg,
Cao, Tian Yu,
Carnap, Rudolf,
Caspar, Max,
Cauchy, Augustin-Louis,
Caveing, Maurice,
Cellucci, Carlo,
Chew, Geoffrey,
Clair, Pierre,
Clausius, Rudolf,
Cohen, I. Bernard,
Cohen, Paul Jonathan,
Cohn-Vossen, Stefan,
Comte, Auguste,
Copi, Irving M.,
Curry, Haskell Brooks,

d'Alembert, Jean-Baptiste Le Rond,
Darvas, György,
Davis, Philip J.,
Dawson, John William,
Dedekind, Julius Wilhelm Richard,
Dehaene, Stanislas,
de la Vallée Poussin, Charles-Jean,
de Raedt, Luc,
Descartes, René,
Detlefsen, Michael,
Dickens, Charles,
Dieudonné, Jean,
Dilthey, Wihelm,
Diofanto,
Diogene Laerzio,
Dirac, Paul Adrien Maurice,
Dirichlet, Peter Gustav Lejeune,
Dummett, Michael,
du Bois-Reymond, Emil,

Eberhard, Johann August,
Einstein, Albert,
Ellis, Robert Leslie,
Epicuro,
Erdös, Paul,
Euclide,
Eudosso,
Euler, Leonard,
Ewald, William,
Favaro, Antonio,
Feferman, Solomon,
Fenstad, Jens Erik,
Fermat, Pierre de,
Feynman, Richard Phillips,
Field, Hartry,
Filodemo di Gadara,
Fraenkel, Abraham Adolf,
Franklin, James,
Franks, John,
Frege, Gottlob,
Fricke, Robert,
Friedlein, Gottfried,

Gabriel, Gottfried,
Galilei, Galileo,
Gentzen, Gerhard,
George, Alexander,
Gerhardt, Carl Immanuel,
Giaquinto, Marcus,
Gillies, Donald,
Girard, Jean-Yves,
Girbal, François,
Giusti, Enrico,
Gleick, James,
Gödel, Kurt,
Goldbach, Christian,
Grayling, Anthony C.,
Grosholz, Emily R.,

Hadamard, Jacques,
Hahn, Hans,
Haken, Wolfgang,
Hamming, Richard Wesley,
Hart, Wilbur Dyre,

Hartshorne, Charles,
Heath, Douglas Denon,
Heiberg, Iohan Ludvig,
Heisenberg, Werner Karl,
Hellinger, Ernst,
Hermes, Hans,
Hermite, Charles,
Hersh, Reuben,
Hilbert, David,
Hintikka, Jaakko,
Hultsch, Friedrich,
Hume, David,
Husserl, Edmund,

Ippocrate di Chio,
Ippocrate di Cos,

Jacquette, Dale,
Jaffe, Arthur,
Jeffrey, Richard,
Jessop, Thomas Edmund,
Jevons, William Stanley,

Kac, Mark,
Kagan, V.F.,
Kambartel, Friedrich,
Kant, Immanuel,
Kapitan, Tomis,
Kapp, Ernst,
Kepler, Johannes,
Ketner, Kenneth Laine,
Keynes, John Maynard,
Kirchhoff, Gustav Robert,
Kitcher, Philip,
Kleene, Stephen Cole,
Kline, Morris,
Knorr, Wilbur Richard,
Kordig, Carl R.,
Körner, Stephan,
Koyré, Alexandre,
Kreisel, Georg,
Kronecker, Leopold,
Kummer, Ernst Eduard,

Lagrange, Joseph-Louis,
Lakatos, Imre,
Lakoff, George,
Lam, Clement W.H.,
Lambert, Johann Heinrich,
Landau, Lev Davidovič,
Lang, Serge,
Laplace, Pierre Simon,
Laugwitz, Detlef,
Leary, Christopher C.,
Leibniz, Gottfried Wilhelm,
Le Lionnais, François,
Levinson, Norman,
Littlewood, John Edensor,
Lobačevskij, Nikolaj Ivanovič,
Locke, John,
Loemker, Leroy E.,
Löwenheim, Leopold,
Luce, Arthur Aston,
Łukasiewicz, Jan,

Mac Lane, Saunders,
Machover, Moshé,
MacIntyre, Angus,
Maddy, Penelope,
Mancosu, Paolo,
Mayberry, John,
McCarthy, T.G.,
McGuinness, Brian,
Mill, John Stuart,
Monk, James Donald,
Moore, Gregory H.,
Muggleton, Stephen,

Nagel, Ernest,
Natorp, Paul,
Newman, James R.,
Newton, Isaac,
Nicole, Pierre,
Nidditch, Peter Harold,
Noether, Emmy,
Novalis (von Hardenberg, Friedrich),
Núñez, Rafael E.,

Odifreddi, Piergiorgio,
Ore, Öystein,

Pappo di Alessandria,
Parmenide,
Parsons, Charles,
Pascal, Blaise,
Peano, Giuseppe,
Peirce, Charles Sanders,
Pieri, Mario,
Pinder, Tillmann,
Pitagora,
Planck, Max Karl,
Platone,
Poincaré, Henri,
Pólya, George,
Popper, Karl Raimund,
Prawitz, Dag,
Proclo Diadoco,
Putnam, Hilary,

Quaranta, Mario,

Ramanujan, Srinivasa,
Reichenbach, Hans,
Ribet, Kenneth,
Riemann, Bernhard,
Robinson, Abraham,
Robinson, Richard,
Robson, John M.,
Rosser, John Barkley,
Rota, Gian-Carlo,
Rudio, Ferdinand,
Russell, Bertrand,

Salmon, Wesley C.,
Samuel, Richard,
Schilpp, Paul Arthur,
Schoenman, Ralph,
Schopenhauer, Arthur,
Schrödinger, Erwin,
Schulz, Gerhard,
Schwartz, Jacob T.,
Schweber, Silvan S.,

Selberg, Atle,
Selby-Bigge, Lewis Amherst,
Senechal, M.,
Sesto Empirico,
Shakespeare, William,
Shapiro, Stewart,
Shimura, Goro,
Sierpiński, Wacław,
Simon, Herbert Alexander,
Simplicio,
Simpson, Stephen George,
Skolem, Thoralf,
Solovay, Robert M.,
Spedding, James,
Steck, Max,
Steiner, Mark,
Stieltjes, Thomas Jan,
Stone, Marshall,
Suppes, Patrick,
Swiercz, Stan,
Szabó, Árpád,

Takeuti, Gaisi,
Talete,
Taniyama, Yutaka,
Tannery, Paul,
Tarski, Alfred,
Thiel, Christian,
Thiel, Larry,
Tragesser, Robert S.,
Troelstra, Anne Sjerp,
Turing, Alan Mathison,
Tymoczko, Thomas,

Vaihinger, Hans,
Vailati, Giovanni,
van Dalen, Dirk,
Vandamme, Ferdinand,
van Heijenoort, Jean,
Velleman, Daniel J.,
Veraart, Albert,
Viète, François,
von Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand,
von Koch, Helge,

von Löhneysen, Wolfgang Freiherr,
von Neumann, John,

Wagner, Steven,
Waring, Edward,
Weierstrass, Karl Wilhelm,
Weiss, Paul,
Weyl, Hermann,
Whitehead, Alfred North,
Wiener, Norbert,
Wigner, Eugene P.,
Wiles, Andrew,
Williams, Hugh C.,
Wittgenstein, Ludwig,
Worrall, John,

Zabarella, Jacopo,
Zahar, Elie,
Zemanian, Armen H.,
Zenone di Elea,
Zermelo, Ernst,

Indice degli argomenti

abduzione
banalità della,
e *apagogè*,
e creatività,
e *inventio medii*,
e ipotesi,
formulazione della,
adattamento
e aritmetica,
e geometria,
e ipotesi, e matematica,
e soluzione di problemi,
agenti ideali
e oggetti matematici,
limiti degli,
algoritmo del British Museum
e induzione meccanica,
e ipotesi,
e sforzo,
formulazione dello,
razionalità dello,
analogia
come sottospecie dell'induzione,
e logica epicurea,
e uso della figura,
necessità della,
negativa,
per concordanza,
per concordanza e discordanza,
per equiproporzionalità,
per indistinguibilità separata,
per quasi-eguaglianza,
positiva,
rapporto con l'induzione,
ruolo della,
antiriduzionismo
analitico,
assiomatico,
applicabilità della matematica
e affezioni,

e descrizione del mondo fisico,
ed essenza,
assunzione del mondo aperto
articolazione della,
completamento della,
e concezione euristica,
e interattività,
esigenza della,
e sviluppo della matematica,
formulazione della,
assunzione del mondo chiuso
articolazione della,
e concezione fondazionalista,
e sviluppo della matematica,
formulazione della,
insostenibilità della,
astrazione
e oggetti matematici,
limiti della,

certezza della matematica
e concezione euristica,
e concezione fondazionalista,
concezione astratta
come filosofia implicita,
difetti della,
formulazione della,
e algebra,
e algebra della logica,
e concezione concreta,
e geometrie non-euclidee,
e interpretazione,
e romanticismo,
e teoria dei gruppi,
incongruenze dei sostenitori della,
vantaggi della,
concezione concreta
e concezione astratta,
formulazione della,
concezione euristica
completamento della,
e certezza,
e oggetti matematici,
formulazione della,

questioni fondamentali della,
concezione fondazionalista
e certezza,
e oggetti matematici,
formulazione della,
insostenibilità della,
conoscenza matematica
carattere sintetico a priori della,
e costruzione,
possibilità della,
costruzione
e assioma,
e definizione,
e dimostrazione,
e intuizione,
e metodo assiomatico,
e schema,
possibilità della,

deduzione
centralità della,
come logica della matematica,
e intuizione,
e memoria,
impossibilità di regole per la,
definizione
come abbreviazione e suoi limiti,
come mezzo di scoperta,
implicita,
dimostrazione
con l'aiuto del computer,
controllo della correttezza della,
errori nella,
lunga,
pluralità,

efficacia della matematica
e caos deterministico,
e corde vibranti,
e curve meccaniche,
e funzioni analitiche,
e nozione di funzione,
e rinormalizzazione,

filosofia

e giustificazione,
e intuizione,
sfiducia nella,
filosofia della matematica
come disciplina specializzata,
e conoscenza della matematica,
e logica matematica,
e problema dell'esistenza matematica,
e progresso della matematica,
e scoperta matematica,
e storia della matematica,
principale problema della,
testi introduttivi alla,
finzionalismo
e concezione euristica,
e primo teorema di incompletezza,
e secondo teorema di incompletezza,
formulazione del,

generalizzazione
come mezzo per trovare ipotesi,
congiunta con la particolarizzazione,
formulazione della,
gerarchia degli insiemi
formulazione della,
e agenti ideali,
giustificazione della matematica
auto- ,
e intuizione,
e plausibilità,
pragmatica,
problema della,

ibridazione
e sovrapposizione di domini,
formulazione della,
ibridi
e calcolo infinitesimale,
e geometria,
incoerenza trattabile degli,
origine degli,
idealizzazione
e oggetti matematici,
limiti della,
ignorabimus

formulazione dello,
obiezioni contro,
induzione
come sottospecie dell'analogia,
da più casi,
da un solo caso,
e certezza,
e logica epicurea,
e uso della figura,
e probabilità,
meccanica,
necessità della,
obiezioni contro,
pregiudizio contro,
rapporto con l'analogia,
ruolo della,
inferenza corretta
ampliatività della,
carattere sintetico della,
inferenze non-deduttive
come insieme aperto,
problemi sulle,
intuizione
centralità della,
e certezza,
e costruzione di concetti,
e deduzione,
e filosofia,
empirica,
e oggetti matematici patologici,
e scoperta matematica,
formulazione della,
impossibilità di regole per la,
intellettuale,
possibilità della,
pura,
sensibile pura,

logica della giustificazione
e certezza,
e metamatematica,
filosofia come,
metodo della,
logica epicurea
e analogia,

e induzione,
obiezione degli stoici alla,
risposta agli stoici,
logica della matematica
come logica deduttiva,
come logica più ampia,
logica della scoperta
e certezza,
ed estetica della scoperta,
e inferenze ampliative,
e inferenze non-deduttive,
e paradosso dell'inferenza,
e psicologia della scoperta,
impossibilità di una,
rinuncia alla,

matematica
applicabilità della,
come sistema chiuso,
come studio delle strutture,
e adattamento,
e mondo fisico,
e pensiero concettuale,
e romanticismo,
e situazioni complesse,
e situazioni semplici,
e sopravvivenza,
e verità,
finitaria,
infinitaria,
inversa,
irragionevole efficacia della,
logica della,
metodo della,
opportunismo della,
ragionevole inefficacia della,
sviluppo della,
matematica come dimostrazione di teoremi
e assunzione del mondo chiuso,
e infallibilità,
e matematica come soluzione di problemi,
e primo teorema di incompletezza,
formulazione della,
matematica come soluzione di problemi

e assunzione del mondo aperto,
e fallibilità,
e interazione con la conoscenza esistente,
e matematica come dimostrazione di teoremi,
e produzione di nuova informazione,
formulazione della,
plausibilità della,
metafora
extra-matematica,
intra-matematica,
formulazione della,
metamatematica
e dimostrazione,
e logica della giustificazione,
e matematica,
metodo analitico
come metodo della matematica,
come metodo della riduzione,
come metodo delle ipotesi,
completamento del,
contro metodo assiomatico,
e infinità della ricerca delle ipotesi,
e riduzione all'assurdo,
formulazione del,
fortuna del,
metodo analitico-sintetico
e metodo assiomatico,
formulazione del,
metodo assiomatico
come logica della giustificazione debole,
come logica dell'inversione,
come logica dell'organizzazione,
come logica della postulazione,
come logica della scoperta,
come logica dell'unificazione,
come metodo della matematica,
come strumento didattico,
e costruzione,
formulazione del,
limiti del,
metodo di scoperta
come vera logica,
e deduzione,
e intuizione,

e memoria,
e metodo analitico,
e procedure basate su regole date una volta per sempre,
e procedure basate su regole probabilistiche,
e procedure meccaniche,
e sillogistica,
necessità di un,
significato di,
metodo fenomenologico
e primo teorema di incompletezza,
formulazione del,
metodo sintetico
v. metodo assiomatico
metonimia
e simbolismo matematico,
formulazione della,
mostri
v. oggetti matematici patologici

obiezioni contro il crollo del programma della coerenza
formalizzabilità della matematica nota,
formalizzabilità in una successione di sistemi formali,
giustificabilità del nocciolo della pratica matematica,
non-formalizzabilità della matematica finitaria,
utilizzabilità di sistemi con vincoli di coerenza,
obiezioni contro il metodo analitico
algoritmicità delle ipotesi,
cammino infinito,
infondatezza delle ipotesi,
località,
modularità,
necessità di intuizione e divinazione,
regresso all'infinito,
unicità delle ipotesi,
oggetti matematici
come ipotesi,
e agenti ideali,
e astrazione,
e concezione euristica,
e idealizzazione,
esistenza degli,
patologici,

paradossi

del calcolo infinitesimale,
della teoria degli insiemi,
paradosso dell'inferenza
e logica della scoperta,
formulazione del,
parallelismo tra matematica e mondo fisico
e codificazione in linguaggio matematico,
formulazione del,
limiti del,
particolarizzazione
congiunta con la generalizzazione,
formulazione della,
pensiero matematico
e dimostrazione di teoremi,
e logica del secondo ordine,
e menti concrete,
e primo teorema di incompletezza,
plausibilità
concetto di,
obiezioni contro il concetto di,
principio
di determinabilità,
di determinazione completa,
problema della duplicazione del cubo
e metodo della riduzione,
formulazione del,
problema dell'esistenza matematica
caduta del,
e concezione fondazionalista,
e filosofia della matematica,
formulazione del,
irrilevanza del,
ruolo del,
problema della quadratura delle lunule
e metodo della riduzione,
formulazione del,
problemi matematici
formulazione dei,
nascita dei,
posizione dei,
soluzione dei,
programma della coerenza
aspettative sul,
e certezza,

e dimostrazioni di coerenza,
e formalizzazione,
e primo teorema di incompletezza,
e programma della conservazione,
e secondo teorema di incompletezza,
e teorema di completezza,
e teorema di esistenza di estensioni false,
e teorema di incompletezza della logica del secondo ordine,
e teorema di indecidibilità,
e teorema di indefinibilità della verità,
e terzo teorema di incompletezza,
formulazione del,
programma della conservazione
formulazione del,
e programma della coerenza,
proposizioni
ideali,
reali,

riduzione all'assurdo
e dimostrazione indiretta,
e esperienza immediata,
e filosofia eleatica,
e metodo analitico,
e metodo assiomatico,
e *modus tollens*,
formulazione della,
riduzionismo
assiomatico,
insiemistico,
riflessione sulla matematica
e conoscenza della matematica,
e logica matematica,
e progresso della matematica,
e storia della matematica,
principale problema della,
romanticismo
e concezione astratta,
e matematica,

scoperta matematica
come processo irrazionale,
come processo razionale,
e congetturare senza regole,

e genio,
e giustificazione,
e illuminazione improvvisa,
e intuizione,
e logica,
e pensiero iniziale,
sistema aperto
e assunzione del mondo aperto,
formulazione di,
sistema chiuso
e assunzione del mondo chiuso,
formulazione di,
sistema di assiomi
coerenza,
completezza,
decidibilità,
sistema formale
appropriato,
categorico,
coerente,
completo,
completo rispetto alla validità logica,
decidibile,
del primo e del secondo ordine,
espressivo,
esternamente coerente,
condizione di non-artificiosità,
variante di Rosser di,

teorema
di categoricità,
di completezza,
di esistenza del modello,
di esistenza di estensioni false,
di indecidibilità,
di indefinibilità della verità,
di Löwenheim-Skolem,
di non-enumerabilità meccanica,
di non-esistenza del modello,
di normalizzazione,
di trasferimento,
teorema di incompletezza
della logica del secondo ordine,
primo,
secondo,

terzo,
teoria degli insiemi
e intuizione intellettuale,
e numeri naturali,
ZFC,

uso della figura
e analogia,
ed errore,
e induzione,
e intuizione,
e pensiero inconsapevole,
e pensiero matematico,
e visione,

vantaggi del metodo analitico
antiriduzionismo analitico,
cambiabilità delle regole in corso d'opera,
giustificazione delle ipotesi,
gradi di correttezza delle dimostrazioni,
incompletezza,
interazione con la conoscenza esistente,
pluralità delle dimostrazioni,
produzione di nuova informazione,
spiegazione della soluzione di problemi,
variazione dei dati
parziale,
totale,

Indice del volume

Introduzione

Parte prima
La concezione fondazionalista

1. La concezione fondazionalista

1. Caratteri della concezione fondazionalista, p. - 2. Filosofia e giustificazione, p. - 3. L'ambito della filosofia, p.

2. Le origini della concezione fondazionalista

1. Impossibilità di una logica della scoperta, p. - 2. Il ruolo del genio, p. - 3. La natura del metodo, p. - 4. La concezione concreta, p. - 5. Condizioni sui sistemi di assiomi, p. - 6. La filosofia come logica della giustificazione, p. 16 - 7. Il metodo della logica della giustificazione, p.

3. La concezione fondazionalista e la certezza

1. La possibilità della conoscenza sintetica a priori, p. - 2. La possibilità dell'intuizione pura, p. - 3. La possibilità della costruzione, p. - 4. Metodo assiomatico e costruzione, p.

4. L'influenza della concezione fondazionalista

1. La centralità dell'intuizione, p. - 2. La natura del metodo, p. - 3. La concezione astratta, p. - 4. Condizioni sui sistemi di assiomi, p. - 5. La metamatematica come logica della giustificazione, p.

5. La matematica in panni romantici

1. Un'opinione diffusa, p. - 2. Una presunta filosofia implicita, p. - 3. Il romanticismo e la matematica, p. - 4. L'influenza del romanticismo, p. - 5. Il romanticismo e la concezione astratta, p. - 6. *Nescimus sed sciemus*, p.

6. I programmi della coerenza e della conservazione

1. I paradossi, p. - 2. Matematica finitaria e matematica infinitaria, p. - 3. Il programma della coerenza, p. - 4. Il programma della conservazione, p. - 5. Equivalenza dei due programmi, p. - 6. Aspettative sulla realizzabilità dei programmi, p.

7. La matematica come sistema chiuso

1. L'assunzione del mondo chiuso, p. - 2. La formulazione dell'assunzione del mondo chiuso, p. - 3. La base della certezza degli assiomi, p. - 4.

L'articolazione dell'assunzione del mondo chiuso, p. - 5. La natura della matematica, p.

Parte seconda
I limiti della concezione fondazionalista

8. I risultati limitativi

1. Incompletezza e indecidibilità, p. - 2. Indefinibilità della verità, p. - 3. Indimostrabilità della coerenza, p. - 4. Indimostrabilità della coerenza esterna, p. - 5. Non-caratterizzabilità, p. - 6. Esistenza di estensioni false, p. - 7. Incompletezza rispetto alla validità logica, p.

9. Le resistenze al crollo

1. Formalizzabilità della matematica nota, p. - 2. Formalizzabilità in una successione di sistemi formali, p. - 3. Non-formalizzabilità della matematica finitaria, p. - 4. Utilizzabilità di sistemi con vincoli di coerenza, p. - 5. Giustificabilità del nocciolo della pratica matematica, p.

10. L'illusione dell'intuizione intellettuale

1. La matematica e lo spirito del tempo, p. - 2. L'intuizione intellettuale, p. - 3. Il metodo fenomenologico, p. - 4. Insufficienza del metodo fenomenologico, p.

11. Il fallimento della concezione fondazionalista

1. Insostenibilità dell'assunzione del mondo chiuso, p. - 2. Vantaggi dell'incompletezza rispetto alla validità logica, p. - 3. Pensiero matematico e sistemi formali, p. - 4. Insostenibilità della concezione fondazionalista, p.

12. Intuizione e mostri

1. Mostri, p. - 2. Curve e tangenti, p. - 3. Curve e quadrati, p. - 4. Curve e lunghezze, p. - 5. Stati e confini, p. - 6. Superfici e aree, p. - 7. Scomposizioni di sfere, p. - 8. Intuizione e certezza, p.

13. La correttezza delle dimostrazioni

1. Gli errori nelle dimostrazioni, p. - 2. Il controllo della formalizzazione, p. - 3. Le dimostrazioni lunghe, p. - 4. Le dimostrazioni con l'aiuto del computer, p.

14. I difetti del riduzionismo

1. Il riduzionismo assiomatico, p. - 2. L'antiriduzionismo assiomatico, p.

15. I limiti della concezione astratta

1. Difetti della concezione astratta, p. - 2. Incongruenze dei sostenitori della concezione astratta, p.

16. Il metodo assiomatico in abiti dimessi

1. Logica dell'organizzazione, p. - 2. Logica dell'unificazione, p. - 3. Logica della postulazione, p. - 4. Logica della scoperta, p. - 5. Logica

della giustificazione debole, p. - 6. Logica dell'inversione, p.

17. Concezione fondazionalista e oggetti matematici
1. Il problema dell'esistenza matematica, p. - 2. Il ruolo del problema dell'esistenza matematica, p. - 3. Caduta del problema dell'esistenza matematica, p. - 4. Irrilevanza del problema dell'esistenza matematica, p.

Parte terza
La concezione euristica

18. La concezione euristica
1. Caratteri della concezione euristica, p. - 2. Il posto della scoperta nell'attività matematica, p. - 3. La natura dei metodi di scoperta, p.

19. Le origini della concezione euristica
1. La necessità del metodo, p. - 2. Il metodo come logica, p. - 3. La natura del metodo, p.

20. La concezione euristica e la certezza
1. Logica della scoperta e certezza, p. - 2. Intuizione e deduzione, p. - 3. Impossibilità di regole per l'intuizione e la deduzione, p. - 4. La rinuncia a una logica della scoperta, p.

21. L'ampliatività dell'inferenza
1. L'abbandono del mito della certezza, p. - 2. Il paradosso dell'inferenza, p. - 3. La non-ampliatività dell'inferenza corretta, p. - 4. Obiezioni contro la non-ampliatività, p. - 5. La necessità di estendere l'ambito della logica, p.

22. Il metodo analitico
1. L'infinità della ricerca delle ipotesi, p. - 2. Il metodo della riduzione, p. - 3. Il metodo delle ipotesi, p. - 4. Metodo analitico contro metodo assiomatico, p. - 5. La fortuna del metodo analitico, p.

23. L'opposizione al metodo analitico
1. L'infondatezza delle ipotesi, p. - 2. L'algoritmicità delle ipotesi, p. - 3. La necessità dell'intuizione e della divinazione, p. - 4. Il regresso all'infinito, p. - 5. Il cammino infinito, p. - 6. L'unicità delle ipotesi, p. - 7. La località, p. - 8. La modularità, p.

24. I vantaggi del metodo analitico
1. La spiegazione della soluzione dei problemi, p. - 2. La produzione di nuova informazione, p. - 3. L'interazione con la conoscenza esistente, p. - 4. La cambiabilità delle regole in corso d'opera, p. - 5. L'incompletezza, p. - 6. La giustificazione delle ipotesi, p. - 7. I gradi di correttezza delle dimostrazioni, p. - 8. La pluralità delle dimostrazioni, p. - 9. L'antiriduzionismo analitico, p.

25. La riduzione all'assurdo e il metodo analitico
1. La riduzione all'assurdo, p. - 2. Differenze rispetto al metodo analitico, p. - 3. La dimostrazione indiretta, p. - 4. Il *modus tollens*, p. - 5. Riduzione all'assurdo ed esperienza immediata, p.

26. La matematica come sistema aperto
1. L'assunzione del mondo aperto, p. - 2. Il carattere interattivo dello sviluppo della matematica, p. - 3. L'esigenza dell'assunzione del mondo aperto, p. - 4. L'articolazione dell'assunzione del mondo aperto, p. - 5. La natura della matematica, p. - 6. Soluzione di problemi contro dimostrazione di teoremi, p. - 7. Fallibilità contro infallibilità, p.

27. La matematica come soluzione di problemi
1. Le questioni fondamentali della concezione euristica, p. - 2. La nascita dei problemi matematici, p. - 3. La posizione dei problemi matematici, p. - 4. La soluzione dei problemi matematici, p. - 5. Plausibilità della matematica come soluzione di problemi, p.

Parte quarta
I procedimenti per trovare le ipotesi

28. La banalità dell'abduzione
1. Inferenze non-deduttive per trovare le ipotesi, p. - 2. Abduzione e ipotesi, p. - 3. Abduzione e creatività, p. - 4. Abduzione *e apagogé*, p. - 5. Abduzione e *inventio medii*, p.

29. Le ragioni della logica epicurea
1. La centralità della deduzione, p. - 2. La necessità dell'induzione e dell'analogia, p.

30. L'induzione
1. Il ruolo dell'induzione, p. - 2. Le obiezioni contro l'induzione, p. - 3. Il pregiudizio contro l'induzione, p. - 4. Induzione e certezza, p. - 5. L'induzione da più casi, p. - 6. L'induzione da un solo caso, p. - 7. Induzione e probabilità, p.

31. L'analogia
1. Il ruolo dell'analogia, p. - 2. L'analogia per quasi-eguaglianza, p. - 3. L'analogia per indistinguibilità separata, p. - 4. L'analogia per equiproporzionalità, p. - 5. L'analogia per concordanza, p. - 6. L'analogia per concordanza e discordanza, p.

32. Induzione e analogia
1. Un rapporto elusivo, p. - 2. L'induzione come sottospecie dell'analogia, p. - 3. L'analogia come sottospecie dell'induzione, p. - 4. Il rapporto tra induzione e analogia, p.

33. L'uso della figura

1. Uso della figura e pensiero matematico, p. - 2. Uso della figura e induzione, p. - 3. Uso della figura e analogia, p. - 4. Uso della figura e visione, p. - 5. Uso della figura e intuizione, p. - 6. Uso della figura ed errore, p.

34. La generalizzazione e la particolarizzazione

1. La generalizzazione, p. - 2. La particolarizzazione, p. - 3. L'unione di generalizzazione e particolarizzazione, p.

35. La metafora e la metonimia

1. La metafora, p. - 2. Le metafore extra-matematiche, p. - 3. Le metafore intra-matematiche, p. - 4. La metonimia, p.

36. La definizione

1. La definizioni come abbreviazione, p. - 2. Limiti della definizione come abbreviazione, p. - 3. La definizione come mezzo di scoperta, p. - 4. Differenze euristiche tra le definizioni, p.

37. L'ibridazione

1. Gli ibridi, p. - 2. Ibridi e geometria, p. - 3. Ibridi e calcolo infinitesimale, p.

38. La variazione dei dati

1. La variazione totale dei dati, p. - 2. La variazione parziale dei dati, p.

39. Completamento del metodo

1. Le inferenze non-deduttive come insieme aperto, p. - 2. Precisazioni ed aggiunte sulle inferenze non-deduttive, p. - 3. Completamento del metodo analitico, p.

40. Concezione euristica e oggetti matematici

1. Gli oggetti matematici come ipotesi, p. - 2. Caratteri degli oggetti matematici come ipotesi, p. - 3. Il finzionalismo, p. - 4. Ipotesi contro finzioni, p. - 5. Il limite del finzionalismo, p.

Parte quinta

La matematica e il mondo fisico

41. Oggetti matematici e mondo fisico

1. Il rapporto tra la matematica e il mondo fisico, p. - 2. L'astrazione, p. - 3. L'idealizzazione, p. - 4. Gli agenti ideali, p. - 5. Gli oggetti matematici come ipotesi, p.

42. Il parallelismo e l'applicabilità della matematica

1. Il parallelismo, p. - 2. I limiti del parallelismo, p. - 3. L'applicabilità della matematica, p. - 4. Leggi matematiche e mondo fisico, p.

43. L’efficacia della matematica

1. Curve geometriche e curve meccaniche, p. - 2. Le corde vibranti, p. - 3. La nozione di funzione, p. - 4. Le funzioni analitiche, p. - 5. La rinormalizzazione, p. - 6. Il caos deterministico, p. - 7. La ragionevole inefficacia della matematica, p.

44. La naturalizzazione della matematica

1. Matematica e sopravvivenza, p. - 2. Ipotesi e adattamento, p. - 3. Geometria e adattamento, p. - 4. Aritmetica e adattamento, p. - 5. Soluzione di problemi e adattamento, p.

Conclusione

Bibliografia

Indice dei nomi

Indice degli argomenti